

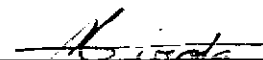
ESFORÇOS HIDRODINÂMICOS EM GRUPOS

DE CORPOS SUBMERSOS

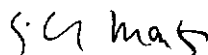
Sérgio Luís Villares Coelho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

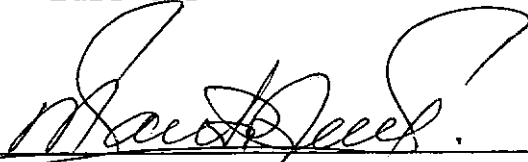
Aprovada por:



Miguel Hiroo Hirata
Presidente



Luiz Carlos Martins



Marcelo de Almeida Santos Neves



Antônio Santos Vargas

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL

Março de 1983

COELHO, SÉRGIO LUÍS VILLARES

Esforços hidrodinâmicos em grupos de corpos submersos. (Rio de Janeiro) 1983.

VII, 79 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc, Engenharia Mecânica, 1983.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Corpos Submersos - hidrodinâmica.
2. Hidrodinâmica. I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

À minha esposa Gilda e
à minha filha Renata.

Meus sinceros agradecimentos aos professores Miguel Hiroo Hirata e Luiz Carlos Martins, pela orientação e apoio despendidos durante a elaboração deste trabalho. Agradeço, ainda, à minha irmã Sandra e aos colegas Breno e Washington pelo indispensável auxílio, e a todo o pessoal do Programa de Engenharia Mecânica que, direta ou indiretamente, colaborou na preparação do presente texto.

SINOPSE

O presente trabalho apresenta uma análise da aplicação do Método dos Elementos de Contorno ao problema definido pela vibração forçada de um par de cilindros esbeltos imersos em uma região fluida infinita. Na formulação do problema foram utilizadas hipóteses simplificadoras, reduzindo-se o mesmo à determinação de um potencial complexo.

Para a realização de tal análise, foi desenvolvida a solução analítica para o problema e, com ela, foram comparados os valores obtidos através da solução numérica acima mencionada. Para a comparação de tais soluções, foram utilizados os valores dos coeficientes de massa adicional característicos do problema.

ABSTRACT

The purpose of this work is to analyse the use of the Boundary Element Method (BEM) for solving the problem defined by the forced vibration of a pair of slender circular cylinders immersed in an infinite fluid domain. The formulation of the problem is done through the assumption of simplifying hypotheses, which reduce its solution to a complex potential determination.

In order to perform the above mentioned analysis, an analytic solution for the problem was developed and compared with the values obtained through the BEM numerical solution. In the comparing of those solutions, the values of the additional mass coefficients for the problem were used.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	01
II - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E MODELAÇÃO	07
II.1 - Modelação	08
II.2 - Adimensionalização	12
II.3 - Linearização	13
II.4 - Massa Adicional	19
III - SOLUÇÃO ANALÍTICA	25
III.1 - O Potencial Complexo	25
III.1.1 - Uma Primeira Aproximação para o Potencial Complexo	25
III.1.2 - O Teorema do Círculo Aplicado ao Potencial Gerado por um Dipolo ...	26
III.1.3 - A Aplicação Simultânea do Teorema do Círculo aos Cilindros "a" e "b"	31
III.1.4 - Solução para o Problema Proposto..	32
III.2 - Massa Adicional	33
III.2.1 - Esforços Hidrodinâmicos	33
III.2.2 - Coeficientes de Massa Adicional ..	42

IV - SOLUÇÃO NUMÉRICA	43
IV.1 - O Método dos Elementos de Contorno	43
IV.2 - Aplicação do Método ao Problema Proposto ...	46
IV.3 - Massa Adicional	48
V - RESULTADOS	50
V.1 - Obtenção dos Resultados	50
V.2 - Análise dos Resultados	52
VI - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	61
APÊNDICE 1 - PROBLEMA SUPLEMENTAR	64
APÊNDICE 2 - RELAÇÕES ENTRE AS GRANDEZAS DIMENSIONAIS E ADIMENSIONAIS	68
APÊNDICE 3 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	70
APÊNDICE 4 - AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS G_{ij} E \hat{H}_{ij}	74
BIBLIOGRAFIA	78

I - INTRODUÇÃO

A determinação dos esforços hidrodinâmicos gerados pelo movimento de corpos submersos é um assunto de grande interesse para a engenharia. No projeto de estruturas submersas, uma estimativa prévia dos esforços hidrodinâmicos que atuarão sobre as mesmas é de fundamental importância, no que diz respeito ao cálculo estrutural a ser realizado.

Uma pesquisa na literatura referente ao assunto revela que, mesmo para modelos matemáticos simplificados, elaborados para descrever o fenômeno real, soluções analíticas só são apresentadas para casos de corpos isolados de geometria simples (esferas, elipsóides, etc...), imersos em regiões fluidas ilimitadas. Quando o problema envolve corpos de geometria mais complexa, ou regiões fluidas finitas ou semi-finitas, as soluções para os modelos matemáticos são obtidas, na grande maioria dos casos, através de métodos numéricos. Para o caso de grupos de corpos submersos, tendo-se em vista a influência recíproca entre eles, os métodos numéricos se tornam praticamente indispensáveis para a solução dos modelos matemáticos estabelecidos.

Dois métodos numéricos muito utilizados no campo da dinâmica dos fluidos são o Método das Diferenças Finitas, baseado na discretização das equações do movimento, e o Método dos Elementos Finitos, desenvolvido nas décadas de 50-60. Estes métodos, entretanto, apresentam a desvantagem de exigirem

uma subdivisão da região fluida em pontos discretos, ou elementos finitos, conforme o caso. Este procedimento torna-se particularmente difícil de ser realizado, nos casos em que se tem regiões fluidas infinitas ou semi-infinitas, com relação às regiões situadas a "grandes distâncias" dos corpos.

A "discretização" da região fluida pode ser evitada ao se aplicar métodos numéricos cujas formulações são baseadas em equações integrais, através da utilização de funções de Green. A aplicação desses métodos permite a determinação de uma solução para todo o campo de velocidades, através da subdivisão apenas do contorno da região fluida em elementos onde se prescreve um determinado tipo de comportamento para o campo de velocidades. Nos métodos de solução por funções de Green, utiliza-se, geralmente, a discretização apenas de parte do contorno, ao se exigir que as referidas funções satisfaçam as condições do contorno não discretizado. Pode-se utilizar, entretanto, funções de Green que não satisfaçam, necessariamente, qualquer condição de contorno do problema. Nestes casos, todo o contorno da região fluida deve ser discretizado em elementos, gerando o método conhecido por Método dos Elementos de Contorno (MEC). Quando se exige que a função de Green utilizada satisfaça alguma condição de contorno do problema, a sua determinação, quando possível, envolve, geralmente, trabalho de cálculo muito complexo (PEDROSA JUNIOR¹³). Assim, uma grande vantagem do MEC reside na simplicidade da obtenção da função de Green utilizada em sua formulação.

Para casos que envolvem condições de

contorno muito complexas, o MEC, assim como o Método dos Elementos Finitos (MEF), pode ser acoplado a soluções analíticas, gerando um método híbrido analítico-numérico (PIRES JUNIOR¹⁴). Mesmo nestes casos, o MEC ainda apresenta uma grande vantagem com relação ao MEF, pois reduz de maneira significativa a ordem do sistema de equações a ser resolvido.

Objetivando-se analisar a aplicação do MEC aos problemas de grupos de corpos submersos, foram desenvolvidos neste trabalho os seguintes itens:

- 1) Obtenção de uma solução analítica para um caso simples de grupos de corpos submersos.
- 2) Obtenção de uma solução numérica para o mesmo problema através da utilização do MEC.
- 3) Análise comparativa dos resultados analíticos e numéricos.

Para se analisar os resultados obtidos, foram comparados os valores dos esforços hidrodinâmicos, calculados através das soluções analítica e numérica.

A equação geral do movimento para um sistema de "N" corpos submersos é dada por:

$$[M]_{NN}\{\ddot{\eta}\}_N + [C]_{NN}\{\dot{\eta}\}_N + [K]_{NN}\{\eta\}_N = \{F\}_N \quad (I-1)$$

onde $[M]_{NN}$ é a matriz de massa do sistema de corpos, $[C]_{NN}$ é a matriz de amortecimento, $[K]_{NN}$ é a matriz de rigidez e $\{\eta\}_N$ o

vetor dos deslocamentos dos corpos. O vetor $\{F\}_N$ das forças externas é constituído pela soma dos vetores $\{F_e\}_N$, das forças de excitação, e $\{F_h\}_N$, das forças hidrodinâmicas exercidas sobre os corpos. Entretanto, segundo CHEN¹, tais esforços hidrodinâmicos podem ser decompostos em quatro tipos de forças de naturezas diferentes:

- 1) Forças fluido-inerciais (proporcionais à aceleração dos corpos).
- 2) Forças de amortecimento viscoso (proporcionais à velocidade de translação dos corpos).
- 3) Forças de restauração fluido-elástica (proporcionais ao deslocamento dos corpos).
- 4) Forças de excitação do fluido (independentes do movimento dos corpos).

Para o caso de N corpos submersos em meio fluido, a equação geral que relaciona os esforços hidrodinâmicos ao movimento desses corpos é dada por (CHEN¹):

$$\underbrace{\{F_h\}_N}_{\text{Forças Hidrodinâmicas}} = \underbrace{[M']_{NN}\{\ddot{\eta}\}_N}_{\text{Forças Fluido-Inerciais}} + \underbrace{[C']_{NN}\{\dot{\eta}\}_N}_{\text{Forças de Amortecimento Viscoso}} + \underbrace{[K']_{NN}\{\eta\}_N}_{\text{Forças Fluido-Elásticas}} + \underbrace{\{Q\}_N}_{\text{Forças de Excitação do Fluido}} \quad (I-2)$$

Nesta equação, a matriz $[M']_{NN}$ é a "ma|triz de massa adicional", $[C']_{NN}$ é a matriz dos coeficientes de amortecimento viscoso, $[K']_{NN}$ é a matriz de rigidez fluida, e $\{Q\}_N$ é o vetor das forças de excitação do fluido. Cada elemento

F_{h_n} do vetor $\{F_h\}_N$ representa a força hidrodinâmica que atua sobre o corpo "n", e cada elemento M'_{nm} da matriz $[M']_{NN}$ é também uma matriz, formada pelas massas adicionais do corpo "n", com relação ao movimento do corpo "m". Definições similares aplicam-se às matrizes $[C']_{NN}$, $[K']_{NN}$ e aos vetores $\{\ddot{\eta}\}_N$, $\{\dot{\eta}\}_N$, $\{\eta\}_N$ e $\{Q\}_N$.

Assim, para o caso tridimensional, o elemento F_{h_n} é dado por:

$$F_{h_n} = \begin{Bmatrix} F_{h_{nx}} \\ F_{h_{ny}} \\ F_{h_{nz}} \end{Bmatrix}$$

onde $F_{h_{nx}}$ é a força hidrodinâmica que atua sobre o corpo "n", na direção "x". Da mesma forma, o elemento M'_{nm} é dado por:

$$M'_{nm} = \begin{bmatrix} M'_{nmxx} & M'_{nmxy} & M'_{nmxz} \\ M'_{nmyx} & M'_{nmyy} & M'_{nmyz} \\ M'_{nmzx} & M'_{nmzy} & M'_{nmzz} \end{bmatrix} \quad (I-3)$$

onde M'_{nmxy} é a massa adicional do corpo "n" na direção "x", com relação ao movimento do corpo "m" na direção "y".

Desta maneira, dado um problema de grupos de corpos submersos, os esforços hidrodinâmicos aplicados

aos mesmos podem ser determinados através do conhecimento das matrizes $[M']$, $[C']$, $[K']$ e das forças externas $\{Q\}$. Tais matrizes podem ser calculadas ao se encontrar uma solução para o campo de velocidades do problema para um determinado instante de tempo t_0 , onde se conhece os valores das acelerações, velocidades e posições dos N corpos envolvidos.

II - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E MODELAÇÃO

Um problema simples, cuja solução analítica fornece uma primeira idéia do comportamento dinâmico de grupos de corpos submersos, reside na análise da vibração forçada de um par de cilindros "esbeltos" imersos em meio fluido infinito. Os eixos de tais cilindros são paralelos, e a direção de vibração é perpendicular ao plano por eles definido (ver Figura II-1).

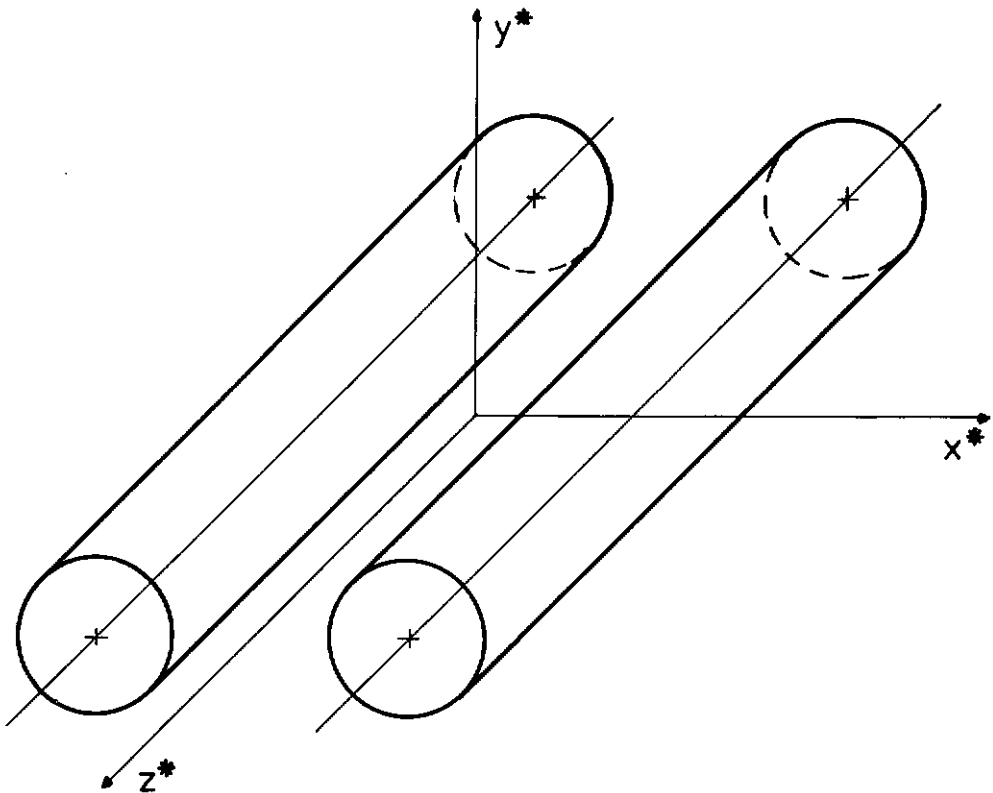


FIGURA II.1 - Definição do problema

II.1 - MODELAÇÃO

A formulação do problema se faz segundo as seguintes hipóteses:

- 1) O escoamento é irrotacional, i.é.,

$$\nabla \times \vec{u}^* = 0 \quad (\text{II-1})$$

- 2) O escoamento se processa incompressivelmente, i.é.,

$$\frac{D\rho^*}{Dt^*} = 0 \quad (\text{II-2})$$

- 3) O escoamento é bidimensional, i.é.,

$$\vec{u}^* = \vec{u}^*(z^*, t^*) \quad (\text{II-3})$$

- 4) Não existem forças de campo aplicadas ao meio-fluido, i.é.,

$$\vec{B}^* = 0 \quad (\text{II-4})$$

- 5) O fluido possui viscosidade desprezível, i.é.,

$$\mu^* = 0 \quad (\text{II-5})$$

- 6) As amplitudes de vibração η_a^* e η_b^* são suficientemente "pequenas" em comparação com os raios dos cilindros, i.é.,

$$\frac{\eta_a^*}{r_a^*} \ll 1 \quad ; \quad \frac{\eta_b^*}{r_b^*} \ll 1 \quad (\text{II-6})$$

Aqui, assim como nas páginas seguintes deste trabalho, as grandezas dimensionais são representadas com um asterisco acompanhando os seus símbolos.

Aplicando-se as hipóteses (II-1), (II-2), (II-3), (II-4) e (II-5) às expressões matemáticas dos princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento, conclui-se que a solução do problema pode ser representada, localmente, atra

vés de um Potencial Complexo. Será investigada a solução proveniente do potencial complexo $W^*(z^*, t^*) = \phi^*(z^*, t^*) + i\psi^*(z^*, t^*)$, correspondente a uma circulação nula (onde $\frac{dW^*}{dz^*} = u_x^* - iu_y^*$).

A definição geométrica do problema é apresentada na Figura II-2, onde o contorno S que define a região fluida é formado pelas fronteiras S_a , para o cilindro "a", S_b , para o cilindro "b", e S_∞ , que representa a fronteira no infinito da região fluida. Assim, o contorno S é dado pela "soma" dos contornos S_a , S_b e S_∞ , i.é.,

$$S = S_a + S_b + S_\infty.$$

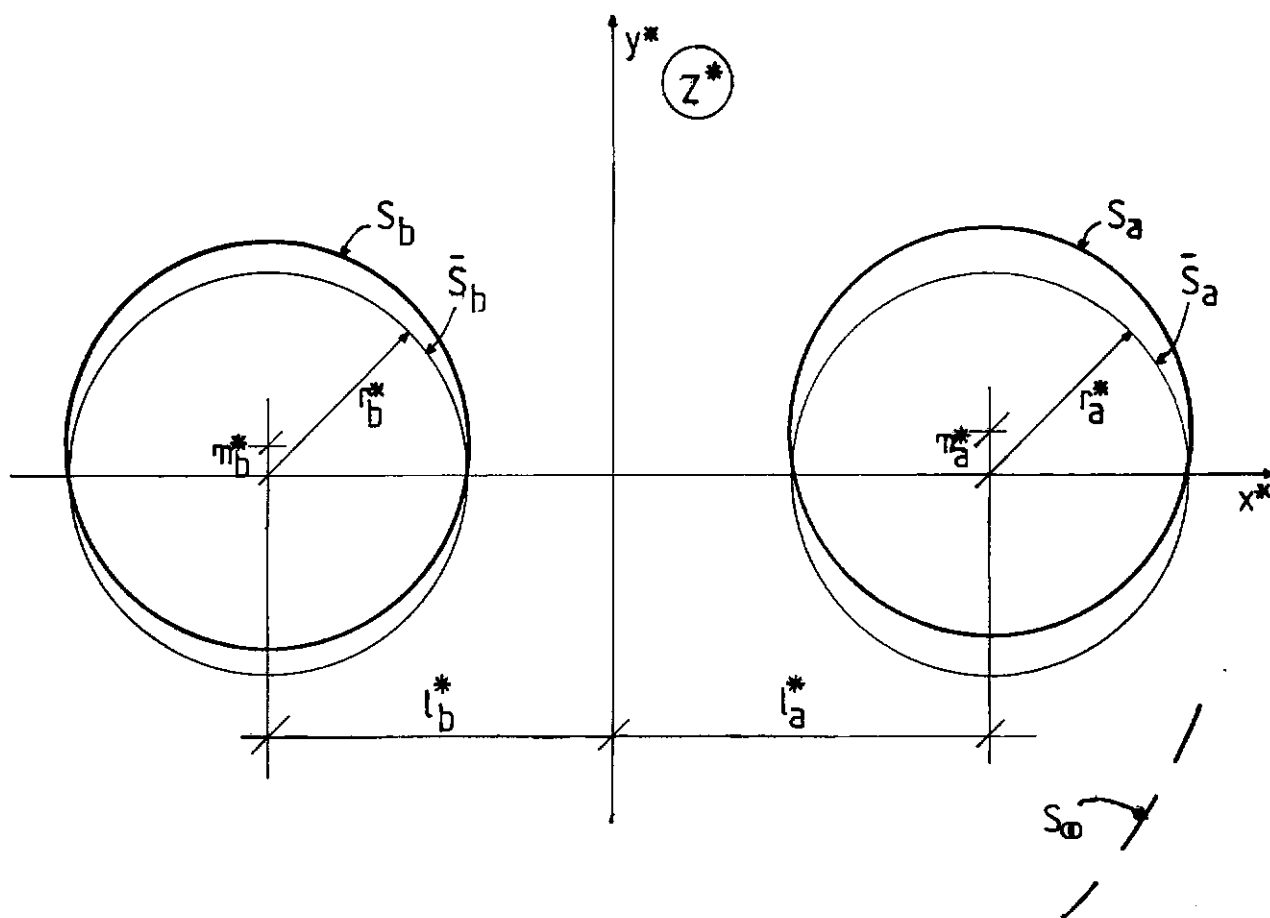


FIGURA II.2 - Modelação

Os contornos parciais S_a e S_b são definidos pelos pares de pontos que satisfazem, respectivamente, as seguintes equações:

$$S_a : \rightarrow (x^* - \ell_a^*)^2 + (y^* - \eta_a^*(t^*))^2 = r_a^{*2}$$

$$S_b : \rightarrow (x^* + \ell_b^*)^2 + (y^* - \eta_b^*(t^*))^2 = r_b^{*2}$$

Definindo-se as funções f_a^* e f_b^* como:

$$\left. \begin{aligned} f_a^* &= (x^* - \ell_a^*)^2 + (y^* - \eta_a^*(t^*))^2 - r_a^{*2} \\ f_b^* &= (x^* + \ell_b^*)^2 + (y^* - \eta_b^*(t^*))^2 - r_b^{*2} \end{aligned} \right] \quad (II-7)$$

os contornos S_a e S_b podem, alternativamente, ser determinados pelos pares de pontos que satisfazem as equações:

$$S_a : \rightarrow f_a^* = 0$$

$$S_b : \rightarrow f_b^* = 0$$

O contorno parcial S_∞ é definido como se segue:

$$S_\infty : \rightarrow |Z^*| \rightarrow \infty$$

A definição do Problema de Valor de Contorno (PVC) se faz mediante a aplicação das seguintes condições de contorno:

- 1) A velocidade do fluido tende a zero para pontos a "grandes distâncias" dos cilindros, i.é.,

$$|u^*| \rightarrow 0, \text{ quando } |\sqrt{x^{*2} + y^{*2}}| \rightarrow \infty \quad (II-8)$$

segundo a Figura II-2.

- 2) A componente normal da velocidade do fluido junto às pa

redes dos cilindros é nula com relação a um sistema de referência fixado aos mesmos, i.ê.,

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} \right|_{\bar{S}_a} = \dot{\eta}_a^* \cdot \vec{n}^* \quad ; \quad \left. \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} \right|_{\bar{S}_b} = \dot{\eta}_b^* \cdot \vec{n}^* \quad (\text{II-9})$$

ou seja,

$$\frac{Df_a^*}{Dt^*} = 0 \quad ; \quad \frac{Df_b^*}{Dt^*} = 0$$

Assim, o PVC para o problema proposto é dado por:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi^* &= 0 \quad , \quad \text{na região fluida (n.r.f.)} \\ \frac{Df_a^*}{Dt^*} &= 0 \quad , \quad \text{em } f_a^* = (x^* - \ell_a^*)^2 + (y^* - \eta_a^*(t^*))^2 - r_a^{*2} = 0 \\ \frac{Df_b^*}{Dt^*} &= 0 \quad , \quad \text{em } f_b^* = (x^* + \ell_b^*)^2 + (y^* + \eta_b^*(t^*))^2 - r_b^{*2} = 0 \\ |\nabla \phi^*| &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{quando } |Z^*| \rightarrow \infty \end{aligned} \right] \quad (\text{II-10})$$

Além do PVC, a aplicação das hipóteses formuladas ao princípio da conservação da quantidade de movimento indica que também a Equação de Bernoulli deve ser satisfeita pela solução ϕ^* , i.ê.,

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \frac{p^*}{\rho^*} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] = h^*(t^*) \quad (\text{II-11})$$

O caráter harmônico da vibração imposta aos cilindros "a" e "b" pode ser traduzido através das rela

ções:

$$\left. \begin{aligned} \eta_a^*(t^*) &= \bar{\eta}_a^* \operatorname{sen}(\omega_a^* t^*) \\ \eta_b^*(t^*) &= \bar{\eta}_b^* \operatorname{sen}(\omega_b^* t^* + \delta) \end{aligned} \right] \quad (\text{II-12})$$

O parâmetro adimensional δ estabelece a diferença de fase entre os movimentos dos cilindros "a" e "b".

II.2 - ADIMENSIONALIZAÇÃO

Tomando-se o comprimento padrão r^* dado por

$$r^* = \text{máximo } (r_a^*, r_b^*) \quad (\text{II-13})$$

e o tempo padrão ω^{*-1} dado por

$$\omega^{*-1} = \left[\text{máximo } (\omega_a^*, \omega_b^*) \right]^{-1} \quad (\text{II-14})$$

podemos adimensionalizar o PVC (II-10) e a Equação de Bernoulli (II-11), obtendo:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \quad , \quad \text{n.r.f.} \\ \frac{Df_a}{Dt} &= 0 \quad , \quad f_a = (x - \ell_a)^2 + (y - \eta_a(t))^2 - r_a^2 = 0 \\ \frac{Df_b}{Dt} &= 0 \quad , \quad f_b = (x + \ell_b)^2 + (y - \eta_b(t))^2 - r_b^2 = 0 \\ |\nabla \phi| &\rightarrow 0 \quad , \quad |Z| \rightarrow \infty \end{aligned} \right] \quad (\text{II-15})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = h(t) \quad (\text{II-16})$$

A relação entre as grandezas dimensionais e adimensionais pode ser encontrada no Apêndice 2.

II.3 - LINEARIZAÇÃO

O PVC apresentado em (II-15) é de difícil solução por apresentar condições de contorno não-lineares em S_a e S_b . Entretanto, considerando-se a hipótese (II-6) pode-se dizer que

$$\bar{\eta}_a = O(\bar{\eta}); \quad \bar{\eta}_b = O(\bar{\eta}), \quad \text{onde} \quad \bar{\eta} \rightarrow 0 \quad (\text{II-17})$$

Assim, aplicando-se os métodos de perturbação (VAN DYKE²) ao potencial solução de (II-15) com relação a um dos parâmetros "pequenos" $\bar{\eta}_a$ ou $\bar{\eta}_b$, indicados aqui pelo parâmetro $\bar{\eta}$ ($\bar{\eta} = \bar{\eta}_a$ ou $\bar{\eta} = \bar{\eta}_b$), obtém-se uma representação do mesmo em termos de uma expansão assintótica sobre o parâmetro genérico $\bar{\eta} \rightarrow 0$. A expressão matemática para essa expansão é dada por:

$$\phi(z, t) = \phi_0(z, t) + \bar{\eta} \phi_1(z, t) + \bar{\eta}^2 \phi_2(z, t) + \dots$$

Aplicando-se esta expansão ao PVC (II-15) e tomando-se apenas a primeira aproximação para ϕ , i.é., apenas termos lineares em $\bar{\eta}$, tem-se uma aproximação com erros da ordem de $\bar{\eta}^2$, ou seja,

$$\phi(z,t) = \phi_0(z,t) + \bar{\eta}\phi_1(z,t) + O(\bar{\eta}^2) \quad (\text{II-19})$$

Substituindo-se então a primeira aproximação para ϕ no PVC (II-15) tem-se:

a) Região Fluida:

Na região fluida, a equação de Laplace deve ser satisfeita, i.é.,

$$\nabla^2(\phi_0 + \bar{\eta}\phi_1) = 0 \quad , \quad \text{n.r.f.}$$

Igualando-se os termos de mesma potência de $\bar{\eta}$, tem-se:

$$\nabla^2\phi_0 = 0 \quad , \quad \text{n.r.f.}$$

$$\nabla^2(\bar{\eta}\phi_1) = 0 \quad , \quad \text{n.r.f.}$$

(II-20)

b) Fronteira S_∞ :

Na fronteira S_∞ vale a relação:

$$|\nabla(\phi_0 + \bar{\eta}\phi_1)| \rightarrow 0 \quad , \quad |z| \rightarrow \infty$$

Igualando-se os termos de mesma potência de $\bar{\eta}$, tem-se:

$$|\nabla\phi_0| \rightarrow 0 \quad , \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$|\nabla(\bar{\eta}\phi_1)| \rightarrow 0 \quad , \quad |z| \rightarrow \infty$$

(II-21)

c) Fronteira S_a :

Na fronteira S_a , segundo (II-15), vale a relação:

$$\begin{aligned} \frac{Df_a}{Dt} = & 2(x_a - \ell_a) \left[\phi_{0_x}(x_a, y_a + \eta_a) + \bar{\eta} \phi_{1_x}(x_a, y_a + \eta_a) \right] + \\ & + 2y_a \left[\phi_{0_y}(x_a, y_a + \eta_a) + \bar{\eta} \phi_{1_y}(x_a, y_a + \eta_a) \right] + \\ & - 2y_a \dot{\eta}_a = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

onde (x_a, y_a) é solução de $(x - \ell_a)^2 + y^2 - r_a^2 = 0$

Os termos de mesma potência de $\bar{\eta}$ de (II-22) não podem ser ainda determinados por existir o parâmetro implícito η_a , da mesma ordem de grandeza de $\bar{\eta}$. Este problema pode, no entanto, ser contornado ao se expandir as funções ϕ_0 e ϕ_1 em Séries de Taylor na direção y , em torno do contorno médio definido pelos pontos (x_a, y_a) , i.é.,

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(x_a, y_a + \eta_a) &= \phi_0(x_a, y_a) + \eta_a \phi_{0_y}(x_a, y_a) + \dots \\ \phi_1(x_a, y_a + \eta_a) &= \phi_1(x_a, y_a) + \eta_a \phi_{1_y}(x_a, y_a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-23})$$

Introduzindo-se (II-23) em (II-22) e considerando-se apenas termos da ordem de grandeza $\bar{\eta}$, a relação (II-22) se reduz a:

$$\begin{aligned} & 2(x_a - \ell_a) \left[\phi_{0_x}(x_a, y_a) + \eta_a \phi_{0_{xy}}(x_a, y_a) + \bar{\eta} \phi_{1_x}(x_a, y_a) \right] + \\ & + 2y_a \left[\phi_{0_y}(x_a, y_a) + \eta_a \phi_{0_{yy}}(x_a, y_a) + \bar{\eta} \phi_{1_y}(x_a, y_a) \right] - 2y_a \dot{\eta}_a = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

Igualando-se agora os termos de mesma ordem de grandeza, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} 2(x-\ell_a)\phi_{O_x} + 2y\phi_{O_y} &= 0, \text{ em } \bar{S}_a \\ 2(x-\ell_a)(\eta_a\phi_{O_{xy}} + \bar{\eta}\phi_{1_x}) + 2y(\eta_a\phi_{O_{yy}} + \bar{\eta}\phi_{1_y}) &= 2y\dot{\eta}_a, \text{ em } \bar{S}_a \end{aligned} \right] \quad (\text{II-25})$$

onde \bar{S}_a é o contorno médio de S_a .

d) Fronteira S_b :

Similarmente à fronteira S_a , tem-se:

$$\left. \begin{aligned} 2(x+\ell_b)\phi_{O_x} + 2y\phi_{O_y} &= 0, \text{ em } \bar{S}_b \\ 2(x+\ell_b)(\eta_b\phi_{O_{xy}} + \bar{\eta}\phi_{1_x}) + 2y(\eta_b\phi_{O_{yy}} + \bar{\eta}\phi_{1_y}) &= 2y\dot{\eta}_b, \text{ em } \bar{S}_b \end{aligned} \right] \quad (\text{II-26})$$

onde \bar{S}_b é o contorno médio de S_b .

Resolvendo-se, então, para ϕ_O e ϕ_1 os PVC's definidos por (II-20), (II-21), (II-25) e (II-26), tem-se a aproximação de primeira ordem para a solução de (II-15), quando $\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_b \rightarrow 0$. Assim, tem-se o seguinte PVC para ϕ_O :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi_O &= 0, \text{ n.r.f.} \\ 2(x-\ell_a)\phi_{O_x} + 2y\phi_{O_y} &= 0, \text{ em } \bar{S}_a \\ 2(x+\ell_b)\phi_{O_x} + 2y\phi_{O_y} &= 0, \text{ em } \bar{S}_b \\ |\nabla\phi_O| &\rightarrow 0, \quad |Z| \rightarrow \infty \end{aligned} \right] \quad (\text{II-27})$$

cujas soluções são dadas por $\phi_O = g(t)$.

Aplicando-se este resultado na resolução para ϕ_1 , tem-se o PVC:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\bar{\eta}\phi_1) &= 0, \text{ n.r.f.} \\ 2(x-\ell_a)\bar{\eta}\phi_{1_x} + 2y\bar{\eta}\phi_{1_y} &= 2y\dot{\eta}_a, \text{ em } \bar{S}_a \\ 2(x+\ell_b)\bar{\eta}\phi_{1_x} + 2y\bar{\eta}\phi_{1_y} &= 2y\dot{\eta}_b, \text{ em } \bar{S}_b \\ |\nabla(\bar{\eta}\phi_1)| &\rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \right] \quad (\text{II-28})$$

Assim como $\phi_0 + \bar{\eta}\phi_1$ constitui a aproximação de 1.^a ordem para ϕ , o PVC cuja solução representa esta aproximação para a solução do PVC (II-15) é dado por:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0, \text{ n.r.f.} \\ \frac{D\bar{f}_a}{Dt} &= 2y\dot{\eta}_a, \quad \bar{f}_a = (x-\ell_a)^2 + y^2 - r_a^2 = 0 \\ \frac{D\bar{f}_b}{Dt} &= 2y\dot{\eta}_b, \quad \bar{f}_b = (x+\ell_b)^2 + y^2 - r_b^2 = 0 \\ |\nabla\phi| &\rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \right] \quad (\text{II-29})$$

onde \bar{f}_a e \bar{f}_b são as funções que definem os contornos \bar{S}_a e \bar{S}_b , similarmente a (II-7).

A solução deste PVC é consideravelmente mais simples que a do PVC (II-15), pois não apresenta condições de contorno não lineares. Torna-se importante observar que a solução de (II-29) se "aproxima" da solução de (II-15) quando $\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_b \rightarrow 0$, apresentando erros da ordem de $\bar{\eta}_a^2, \bar{\eta}_b^2$.

A Equação de Bernoulli (II-16) pode também ser simplificada ao se considerar a aproximação de 1.^a ordem para o potencial de velocidade ϕ . Esta simplificação é realizada ao se substituir na equação (II-16) a aproximação de 1.^a ordem para ϕ , i.é.,

$$\frac{\partial(\bar{\eta} \phi_1)}{\partial t} + p + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial(\bar{\eta} \phi_1)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\bar{\eta} \phi_1)}{\partial y} \right)^2 \right] = h(t) - \dot{g}(t) = H(t)$$

Tomando-se, apenas, os termos lineares em $\bar{\eta}$, a aproximação de 1.^a ordem da equação (II-16) se reduz a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p = H(t) \quad (II-30)$$

Assim, a aplicação de (II-30) à solução do PVC (II-29) permite a determinação da distribuição da pressão ao longo da região fluida, com erros da ordem de $\bar{\eta}_a^2$, $\bar{\eta}_b^2$. O conhecimento da distribuição da pressão ao longo de \bar{S}_a e \bar{S}_b permite o cálculo dos esforços hidrodinâmicos sobre os cilindros, através da relação (NEWMANN³):

$$\vec{F}_C = - \int_C p \cdot \vec{n} \, ds \quad (II-31)$$

onde C é um contorno genérico e \vec{n} a normal unitária externa ao mesmo.

Substituindo-se (II-30) em (II-31), e observando-se que H(t) é uma função apenas do tempo, i.é.,

$$\int_C H(t) \cdot \vec{n} \, ds \equiv 0,$$

tem-se, para os contornos \bar{S}_a e \bar{S}_b , as expressões:

$$\vec{F}_a = \int_{\bar{S}_a} \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{II-32})$$

$$\vec{F}_b = \int_{\bar{S}_b} \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{II-33})$$

II.4 - MASSA ADICIONAL

O potencial ϕ solução de (II-29) pode ser expressado como sendo a soma de dois outros potenciais, ϕ_a e ϕ_b , definidos como se segue:

$$\phi_a \text{ é solução de } \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi_a = 0 \quad , \quad \text{n.r.f.} \\ \frac{D\bar{F}_a}{Dt} = 2Y\dot{\eta}_a, \quad \bar{F}_a = (x-\ell_a)^2 + y^2 - r_a^2 = 0 \\ \frac{D\bar{F}_b}{Dt} = 0, \quad \bar{F}_b = (x+\ell_b)^2 + y^2 - r_b^2 = 0 \\ |\nabla \phi_a| \rightarrow 0 \quad , \quad |z| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (\text{II-34})$$

e

$$\phi_b \text{ é solução de } \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi_b = 0 \quad , \quad \text{n.r.f.} \\ \frac{D\bar{F}_a}{Dt} = 0, \quad \bar{F}_a = (x-\ell_a)^2 + y^2 - r_a^2 = 0 \\ \frac{D\bar{F}_b}{Dt} = 2Y\dot{\eta}_b, \quad \bar{F}_b = (x+\ell_b)^2 + y^2 - r_b^2 = 0 \\ |\nabla \phi_b| \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (\text{II-35})$$

Através de algebrismo simples, pode-se verificar que o potencial formado pela soma $\phi_a + \phi_b$ satisfaz o PVC (II-29), constituindo, assim, a solução do mesmo, i.é.,

$$\phi = \phi_a + \phi_b \quad (\text{II-36})$$

Assim, a partir de (II-32) e (II-33), tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_a &= \vec{F}_{aa} + \vec{F}_{ab} = \int_{\bar{S}_a} \frac{\partial \phi_a}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\bar{S}_a} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds \\ \vec{F}_b &= \vec{F}_{ba} + \vec{F}_{bb} = \int_{\bar{S}_b} \frac{\partial \phi_a}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\bar{S}_b} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned} \right] \quad (\text{II-37})$$

Entretanto, sendo ϕ_{a1} o potencial solução de (II-34) quando $\dot{\eta}_a = 1$, pode-se concluir, após uma breve análise da condição de contorno $\frac{D\bar{F}_a}{Dt} = 2y\dot{\eta}_a$, que a solução para o caso de uma velocidade arbitrária $\dot{\eta}_a$ é dada por $\dot{\eta}_a \phi_{a1}$. Então, pode-se dizer que:

$$\phi_a(Z, t) = \phi_{a_s}(Z) \cdot \dot{\eta}_a \quad (\text{II-38})$$

Analogamente para \bar{S}_b , tem-se:

$$\phi_b(Z, t) = \phi_{b_s}(Z) \cdot \dot{\eta}_b \quad (\text{II-39})$$

Substituindo-se estas expressões na relação (II-36), tem-se:

$$\phi(Z, t) = \phi_{a_s}(Z) \cdot \dot{\eta}_a + \phi_{b_s}(Z) \cdot \dot{\eta}_b \quad (\text{II-40})$$

A aplicação de (II-38) e (II-39) às expressões dos esforços hidrodinâmicos definidos em (II-37) fornece:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_a &= \vec{F}_{aa} + \vec{F}_{ab} = \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right) \ddot{\eta}_a + \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right) \ddot{\eta}_b \\ \vec{F}_b &= \vec{F}_{ba} + \vec{F}_{bb} = \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right) \ddot{\eta}_a + \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right) \ddot{\eta}_b \end{aligned} \right] \quad (\text{II-41})$$

Comparando-se (II-41) e (I-2), conclui-se que a equação geral dos esforços hidrodinâmicos aplicada ao problema em questão se reduz a

$$\{F_h\} = [M'] \{\ddot{\eta}\} \quad (\text{II-42})$$

As forças hidrodinâmicas podem ser decompostas em suas componentes cartesianas, i.ê., para o cilindro "a",

$$\left. \begin{aligned} F_{aa_y} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y \ddot{\eta}_a \\ F_{aa_x} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x \ddot{\eta}_a \\ F_{ab_y} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y \ddot{\eta}_b \\ F_{ab_x} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x \ddot{\eta}_b \end{aligned} \right] \quad (\text{II-43})$$

e, para o cilindro "b",

$$\begin{aligned}
 F_{ba_y} &= \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y \ddot{\eta}_a \\
 F_{ba_x} &= \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x \ddot{\eta}_a \\
 F_{bb_y} &= \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y \ddot{\eta}_b \\
 F_{bb_x} &= \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x \ddot{\eta}_b
 \end{aligned}
 \tag{II-44}$$

Comparando-se as expressões relacionadas em (II-42), (II-43) e (II-44), conclui-se que, para o problema em questão, as expressões das massas adicionais definidas segundo (I-3) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 M'_{aayy} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y \\
 M'_{aayx} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x \\
 M'_{abyy} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y \\
 M'_{abyx} &= \left(\int_{\bar{S}_a} \phi_{b_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x \\
 M'_{bayy} &= \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{a_s} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y
 \end{aligned}
 \tag{II-45}$$

$$M'_{bayx} = \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{as} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x$$

$$M'_{bbyy} = \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{bs} \cdot \vec{n} \, ds \right)_y$$

$$M'_{bbyx} = \left(\int_{\bar{S}_b} \phi_{bs} \cdot \vec{n} \, ds \right)_x$$

As massas adicionais M'_{aaxy} , M'_{aaxx} , M'_{abxy} , M'_{abxx} , M'_{baxy} , M'_{baxx} , M'_{bbxy} e M'_{bbxx} não são aplicáveis ao problema proposto, pois as acelerações dos cilindros na direção "x" são nulas.

As matrizes de massa adicional, entretanto, podem ser representadas através de matrizes de "coeficientes de massa adicional" que, para o caso de corpos cilíndricos, segundo CHUNG e CHEN⁴, se relacionam com as primeiras através de relações do tipo:

$$M'_{ij} = \pi \rho \left(\frac{r_i + r_j}{2} \right)^2 M_{ij},$$

onde os subscritos "i" e "j" identificam os corpos "i" e "j", respectivamente.

Aplicando-se esta relação às massas adicionais apresentadas em (II-45), pode-se definir os coeficientes de massa adicional do problema:

$$M_{aay} = \frac{M'_{aayy}}{\pi r_a^2}$$

$$M_{aax} = \frac{M'_{aayx}}{\pi r_a^2}$$

$$M_{aby} = \frac{4M'_{abyy}}{\pi(r_a + r_b)^2}$$

$$M_{abx} = \frac{4M'_{abyx}}{\pi(r_a + r_b)^2}$$

$$M_{bay} = \frac{4M'_{bayy}}{\pi(r_a + r_b)^2}$$

$$M_{bax} = \frac{4M'_{bayx}}{\pi(r_a + r_b)^2}$$

$$M_{bby} = \frac{M'_{bbyy}}{\pi r_b^2}$$

$$M_{bbx} = \frac{M'_{bbyx}}{\pi r_b^2}$$

(II-46)

Assim, os coeficientes de massa adicional são independentes do movimento dos cilindros, sendo característicos para uma determinada relação entre os raios dos mesmos (e.g., r_a^*/r_b^*) e uma determinada distância relativa entre eles (e.g., $[\ell_a^* + \ell_b^*]/r_b^*$).

Na análise de soluções obtidas segundo métodos diferentes, os coeficientes de massa adicional são de grande importância, pois permitem a comparação de valores para várias situações, uma vez que eles dependem apenas da geometria do problema.

III - SOLUÇÃO ANALÍTICA

III.1 - O POTENCIAL COMPLEXO

III.1.1 - Uma Primeira Aproximação para o Potencial Complexo.

O potencial complexo que representa bi dimensionalmente o movimento de translação de um cilindro imerso em meio fluido em repouso no infinito é dado por (ROBERTSON⁵):

$$W_0(z) = \frac{-U_0 r_0^2 e^{i\alpha_0}}{z - z_0}$$

onde U_0 representa a velocidade de translação do cilindro, α_0 a direção do movimento, r_0 o raio e z_0 o centro do mesmo.

Tal potencial representa um dipolo localizado em z_0 e de intensidade $U_0 r_0^2$, orientado segundo a direção α_0 , conforme mostra a Figura III-1.

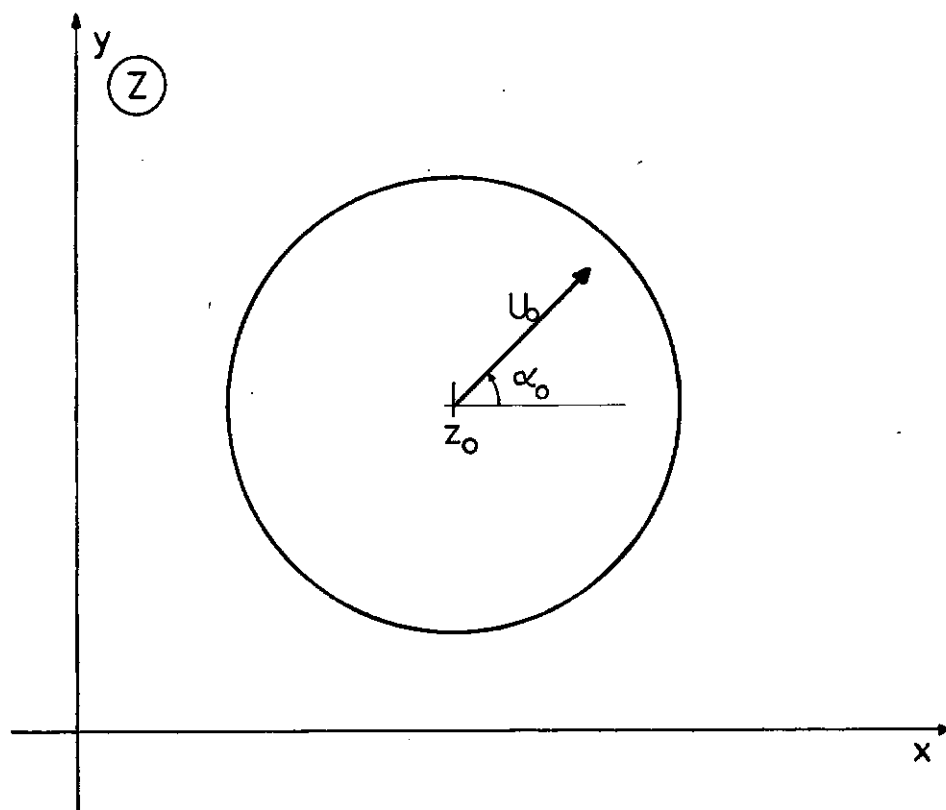


FIGURA III.1 - Translação de um cilindro

A representação da translação de dois cilindros ("a" e "b") imersos em meio fluido, no entanto, não pode ser feita mediante a simples soma dos potenciais que os representam isoladamente, i.ê.,

$$W_{ab}(Z) = - \left(\frac{U_a r_a^2 e^{i\alpha_a}}{Z - z_a} + \frac{U_b r_b^2 e^{i\alpha_b}}{Z - z_b} \right), \quad (\text{III-1})$$

pois tal soma não satisfaz as condições de contorno nas fronteiras dos mesmos. No entanto, ela constitui uma primeira aproximação para a solução do problema, que se aproxima da solução real quanto maior for a distância entre os dois cilindros.

Entretanto, uma melhor aproximação para a solução do problema pode ser obtida através da aplicação simultânea do Teorema do Círculo (MILNE-THOMSON⁶) aos cilindros "a" e "b".

III.1.2 - O Teorema do Círculo Aplicado ao Potencial Gerado por um Dipolo.

O Teorema do Círculo estabelece que, dado um escoamento representado pelo potencial $f(Z)$, o potencial $f_o(Z)$ que representa a inserção de um cilindro de raio r_o (centrado na origem do sistema de coordenadas) em tal escoamento, é dado por:

$$f_o(Z) = f(Z) + \bar{f}\left(\frac{r_o^2}{Z}\right)$$

Assim, aplicando-se o Teorema do Círculo ao potencial gerado por um dipolo, i.ê.,

$$W_d(Z) = \frac{\mu e^{i\alpha_o}}{Z - z_o}$$

onde μ é a intensidade do mesmo, obtém-se:

$$W_{do}(Z) = \frac{\mu e^{i\alpha_0}}{Z - Z_0} - \frac{\mu e^{-i\alpha_0}}{\left(\frac{r_0^2}{Z} - Z_0\right)}$$

Somando-se a constante $\frac{\mu e^{-i\alpha_0}}{\bar{Z}_0}$ ao potencial resultante, tem-se:

$$W_{do}(Z) = \frac{\mu e^{i\alpha_0}}{Z - Z_0} - \frac{\mu \left(\frac{r_0}{Z_0}\right)^2 e^{-i\alpha_0}}{\left(Z - \frac{r_0^2}{\bar{Z}_0}\right)} \quad (\text{III-2})$$

Assim, aplicar o Teorema do Círculo ao potencial gerado pelo dipolo $\frac{\mu e^{i\alpha_0}}{(Z-Z_0)}$ significa, apenas, somar ao mesmo, o potencial gerado por um dipolo "imagem" de intensidade $-\mu \left(\frac{r_0}{Z_0}\right)^2$, localizado em $\frac{r_0^2}{\bar{Z}_0}$, orientado segundo a direção $-\alpha_0$. O potencial (III-2) representa o escoamento ao redor de um cilindro, na presença de um dipolo localizado em Z_0 .

Para o caso específico de dipolos localizados sobre o eixo real e círculos de raio r_0 centrados em $Z = 0$, como indicado na Figura III-2a, o resultado (III-2) se reduz a:

$$W_{do}(Z) = \frac{\mu e^{i\alpha_0}}{Z - h} - \frac{\mu \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 e^{-i\alpha_0}}{Z - \frac{r_0^2}{h}} \quad (\text{III-3})$$

O resultado (III-3) pode ser generalizado para o caso da aplicação do Teorema do Círculo ao potencial gerado por um dipolo localizado no ponto real "c", de maneira a se obter um círculo de raio " r_0 " centrado no ponto real "-b", de acordo com a Figura III-2b. Tal generalização pode ser obtida a partir de um simples deslocamento do eixo imaginário de maneir

ra a se utilizar o plano complexo "Z" em lugar do plano ζ , conforme a Figura III-2b.

Assim, o potencial descrito no plano ζ

por

$$W_{do}(\zeta) = \frac{\mu e^{i\alpha_0}}{\zeta - h} - \frac{\mu \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 e^{-i\alpha_0}}{\zeta - \frac{r_0^2}{h}}$$

é expressado no plano Z por:

$$W_{do}(Z) = \frac{\mu e^{i\alpha_0}}{Z - c} - \frac{\mu \left(\frac{r_0}{b+c} \right)^2 e^{-i\alpha_0}}{Z + \left(b - \frac{r_0^2}{b+c} \right)} \quad (\text{III-4})$$

que constitui o resultado generalizado para (III-3).

Então, o potencial complexo que representa um dipolo genérico localizado no ponto real ℓ_{ao} e um círculo de raio r_b centrado no ponto real $-\ell_{bo}$ (Ver Figura III-3a) é dado por:

$$W_{da}(Z) = \frac{\mu_a e^{i\alpha_a}}{Z - \ell_{ao}} - \frac{\mu_a \left(\frac{r_b}{\ell_{ao} + \ell_{bo}} \right)^2 e^{-i\alpha_a}}{Z + \ell_{b1}} \quad (\text{III-5})$$

$$\text{onde } \ell_{b1} = \ell_{bo} - \frac{r_b^2}{\ell_{ao} + \ell_{bo}}$$

De maneira análoga, para representar um dipolo genérico localizado em $-\ell_{bo}$ e um círculo de raio r_a centrado em ℓ_{ao} (ver Figura III-3b), tem-se:

$$W_{db}(Z) = \frac{\mu_b e^{i\alpha_b}}{Z + \ell_{bo}} - \frac{\mu_b \left(\frac{r_a}{\ell_{ao} + \ell_{bo}} \right)^2 e^{-i\alpha_b}}{Z - \ell_{a1}} \quad (\text{III-6})$$

$$\text{onde } \ell_{a1} = \ell_{ao} - \frac{r_a^2}{\ell_{ao} + \ell_{bo}}$$

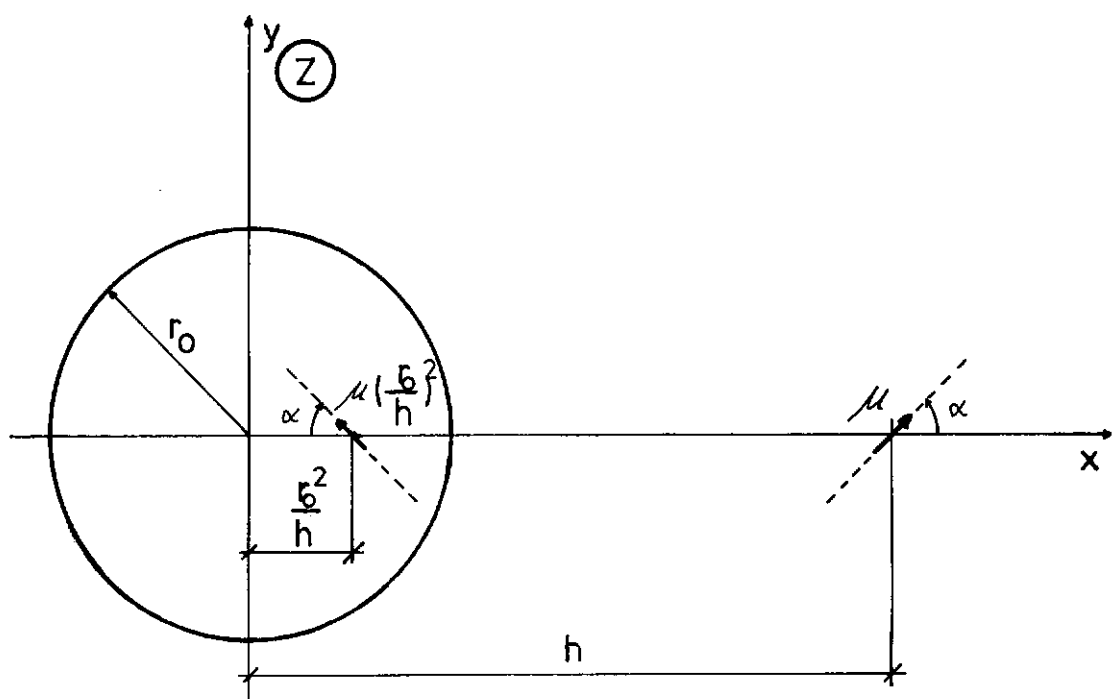


FIGURA III.2a - Cilindro e dipolo

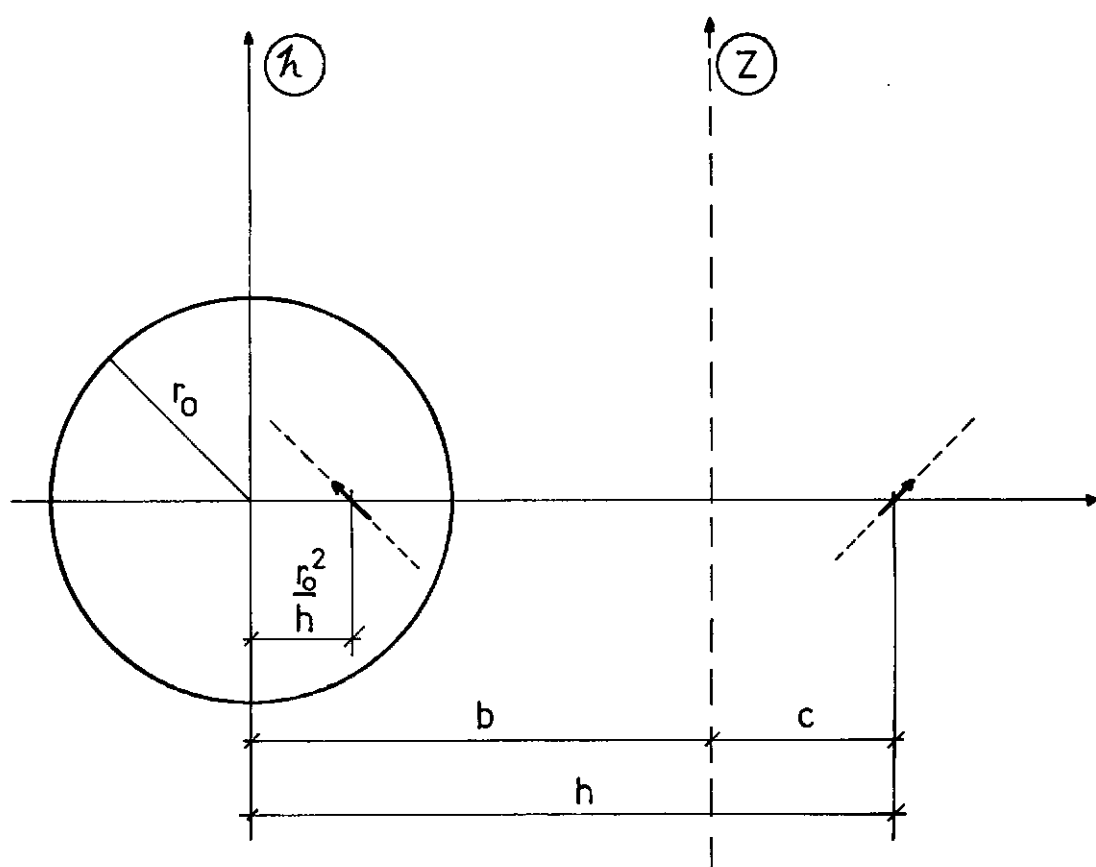


FIGURA III.2b - Mudança do referencial

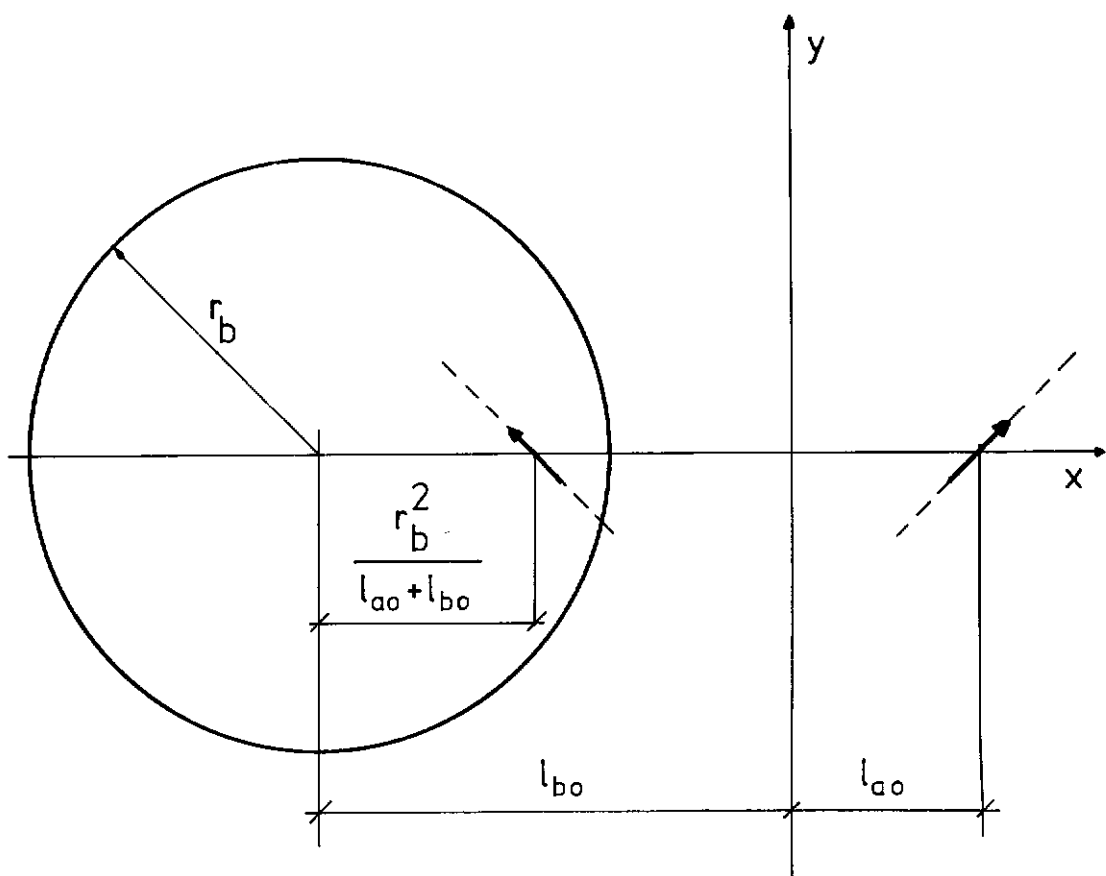


FIGURA III.3a - Dipolo imagem em S_b

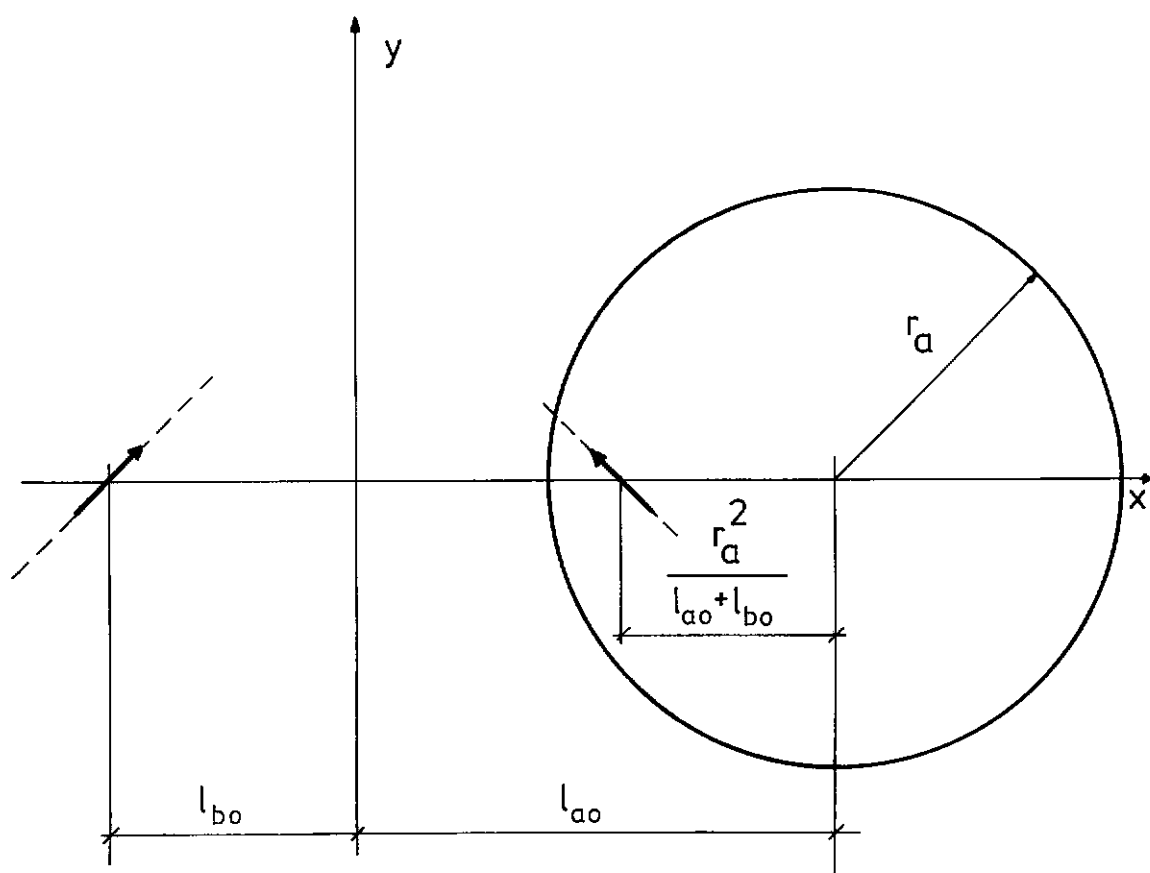


FIGURA III.3b - Dipolo imagem em S_a

III.1.3 - A Aplicação Simultânea do Teorema do Círculo aos Cilindros "a" e "b"

A soma dos potenciais (III-5) e (III-6) constitui a formulação básica para uma aproximação mais refinada do potencial que representa a translação de dois cilindros imersos em meio fluido:

$$W_{ab}(Z) = \frac{\mu_{ao} e^{i\alpha_a}}{Z - \ell_{ao}} + \frac{\mu_{bo} e^{i\alpha_b}}{Z + \ell_{bo}} - \frac{\mu_{a1} e^{-i\alpha_b}}{Z - \ell_{a1}} - \frac{\mu_{b1} e^{-i\alpha_a}}{Z + \ell_{b1}} \quad (\text{III-7})$$

$$\text{onde } \mu_{b1} = \mu_{ao} \left(\frac{r_b}{\ell_{ao} + \ell_{bo}} \right)^2 \quad \text{e} \quad \mu_{a1} = \mu_{bo} \left(\frac{r_a}{\ell_{ao} + \ell_{bo}} \right)^2$$

Tal potencial, entretanto, ainda viola as condições de contorno nas paredes dos cilindros. As influências dos dipolos de intensidades μ_{ao} e μ_{bo} nos contornos dos cilindros "b" e "a", respectivamente, são corrigidas através da aplicação do Teorema do Círculo, pela introdução dos dipolos de intensidades μ_{b1} e μ_{a1} . No entanto, a presença das "imagens" de intensidades μ_{a1} e μ_{b1} implica novamente em uma violação das condições de contorno dos cilindros "b" e "a", respectivamente. Através de nova aplicação do Teorema do Círculo, as influências de μ_{a1} e μ_{b1} podem ser corrigidas pela introdução das imagens desses dipolos (de intensidades μ_{b2} e μ_{a2}), que, por sua vez, determinarão ainda uma violação das condições de contorno na fronteira dos cilindros. Como os dipolos introduzidos a cada aplicação do Teorema do Círculo são de intensidade menor do que aqueles que os originaram, melhor será a aproximação obtida para o potencial complexo quanto maior o número de dipolos "imagem" utilizados, pois:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{an} e^{i\alpha}}{z - \ell_{an}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{bn} e^{i\alpha}}{z + \ell_{bn}} = 0 \quad (\text{III-8})$$

ou seja, o potencial complexo que representa a translação de dois cilindros de raios r_a e r_b , velocidades U_a e U_b e direções de movimento α_a e α_b , é dado por:

$$W_{ab}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_{a(2n)} e^{i\alpha_a}}{z - \ell_{a(2n)}} + \frac{\mu_{b(2n)} e^{i\alpha_b}}{z + \ell_{b(2n)}} - \frac{\mu_{a(2n+1)} e^{-i\alpha_b}}{z - \ell_{a(2n+1)}} + \right. \\ \left. - \frac{\mu_{b(2n+1)} e^{-i\alpha_a}}{z + \ell_{b(2n+1)}} \right) \quad (\text{III-9})$$

onde

$$\begin{cases} \mu_{ao} = -U_a r_a^2 & ; & \mu_{bo} = -U_b r_b^2 \\ \mu_{a(n+1)} = \mu_{bn} \left(\frac{r_a}{\ell_{an} + \ell_{bo}} \right)^2 & ; & \mu_{b(n+1)} = \mu_{an} \left(\frac{r_b}{\ell_{ao} + \ell_{bn}} \right)^2 \\ \ell_{a(n+1)} = \ell_{ao} - \frac{r_a^2}{\ell_{ao} + \ell_{bn}} & ; & \ell_{b(n+1)} = \ell_{bo} - \frac{r_b^2}{\ell_{an} + \ell_{bo}} \end{cases}$$

III.1.4 - Solução para o Problema Proposto

A aplicação da equação (II-12) aos resultados obtidos em (III-9) fornece o potencial complexo que representa a solução analítica para o problema definido pelo PVC (II-29), ou seja,

$$\phi(z, t) = \text{Re} [W(z, t)]$$

onde

$$W(z, t) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_{an}}{z - \ell_{an}} + \frac{\mu_{bn}}{z + \ell_{bn}} \right)$$

$$\text{onde: } \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ao} = \bar{\eta}_a \omega_a r_a^2 \cos(\omega_a t); \mu_{bo} = \bar{\eta}_b \omega_b r_b^2 \cos(\omega_b t + \delta) \\ \mu_{a(n+1)} = \mu_{bn} \left(\frac{r_a}{\ell_{an} + \ell_{bo}} \right)^2; \mu_{b(n+1)} = \mu_{an} \left(\frac{r_b}{\ell_{ao} + \ell_{bn}} \right)^2 \\ \ell_{a(n+1)} = \ell_{ao} - \frac{r_a^2}{\ell_{ao} + \ell_{bn}}; \ell_{b(n+1)} = \ell_{bo} - \frac{r_b^2}{\ell_{an} + \ell_{bo}} \end{array} \right. \quad (\text{III-10})$$

A representação gráfica da localização desta série de dipolos é apresentada na Figura III-4.

III.2 - MASSA ADICIONAL

III.2.1 - Esforços Hidrodinâmicos

A resultante das forças hidrodinâmicas exercidas por um fluido em uma superfície cilíndrica de comprimento infinito nele imersa, caso não exista circulação em torno da mesma é, por unidade de comprimento do cilindro, dada por (MILNE-THOMSON⁷):

$$\bar{F} = X - iY = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 \quad (\text{III-11})$$

onde:

$$\bar{F}_1 = \frac{i}{2} \rho \oint_C \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz \quad (\text{III-12})$$

$$\bar{F}_2 = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \oint_C \bar{w}_c d\bar{z} \quad (\text{III-13})$$

$$\bar{F}_3 = \rho A \frac{d\bar{U}}{dt} \quad (\text{III-14})$$

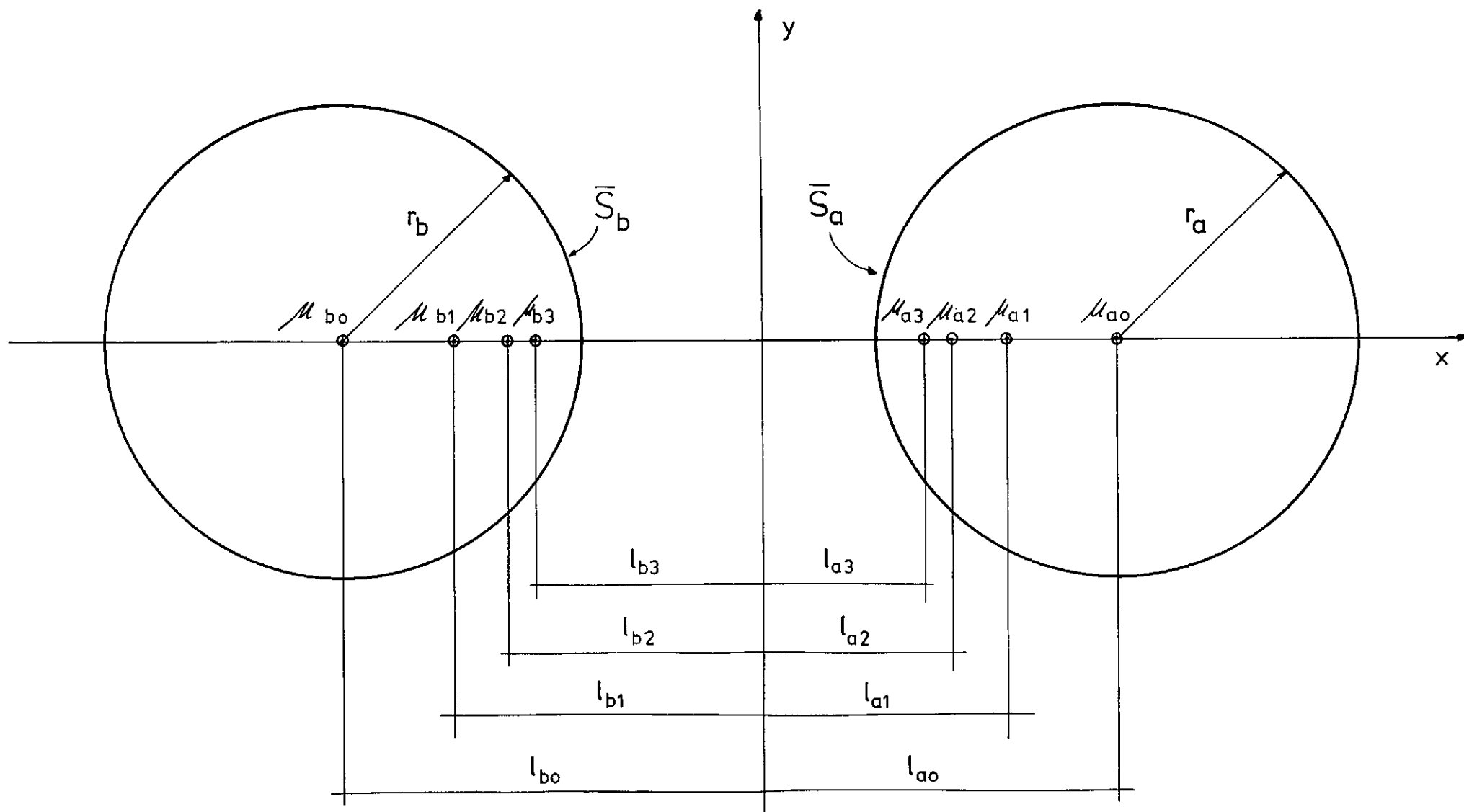


FIGURA III.4 - Representação gráfica da série de dipolos

onde \bar{U} é o complexo conjugado da velocidade de translação do cilindro, W_c o potencial complexo que representa o escoamento, A a área da seção transversal do cilindro, e ρ a densidade do fluido. A expressão (III-12) representa o Teorema de Blasius para os casos de escoamento em regime permanente.

A aplicação do potencial complexo (III-10) às expressões (III-11), (III-12), (III-13) e (III-14) fornece, assim, a resultante dos esforços hidrodinâmicos nos cilindros "a" e "b".

III.2.1.1 - Cálculo de \bar{F}_1 :

Considerando-se, no plano complexo, os contornos S e C , conforme a Figura III-5, e N dipolos ($\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$) distribuídos, localizados em z_0, z_1, \dots, z_N , respectivamente, tem-se a expressão (KENNARD⁸):

$$\oint_S \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz = \oint_C \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz + \sum_{n=0}^N \oint_{\gamma_n} \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz \quad (\text{III-15})$$

onde γ_n é um contorno circular de raio $\epsilon \rightarrow 0$ em torno do ponto z_n , e $W_c(z)$ o potencial complexo que representa o escoamento.

No entanto, se

$$\oint_S \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz \rightarrow 0, \quad (\text{III-16})$$

tem-se:

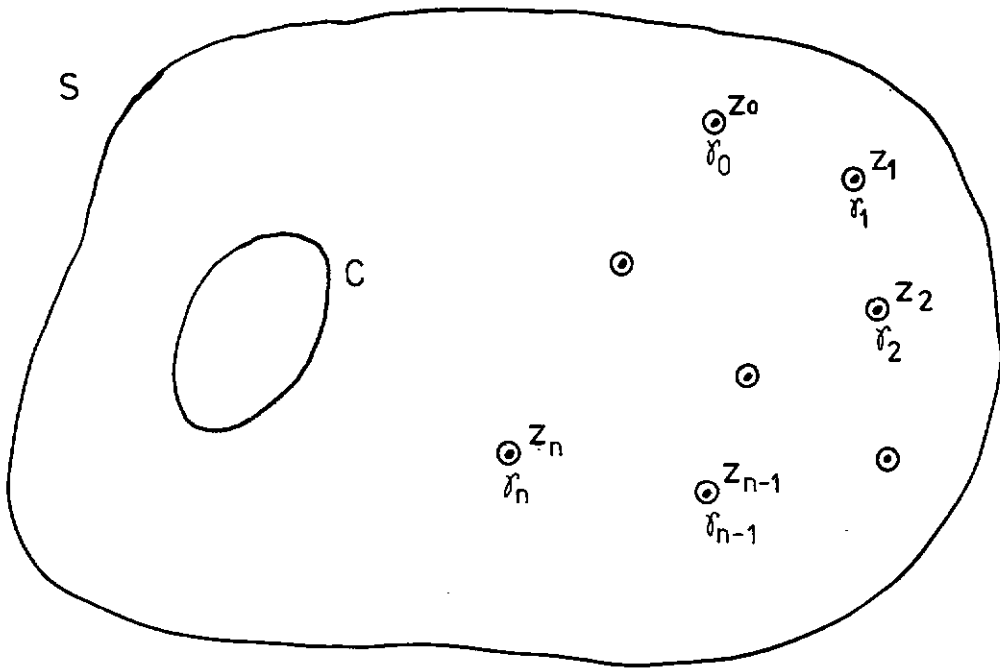


FIGURA III.5 - Distribuição de singularidades

$$\int_C \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz = - \sum_{n=0}^N \oint_{\gamma_n} \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz \quad (\text{III-17})$$

Definindo-se a função $f_{cn}(z)$ como

$$f_{cn}(z) = \frac{d}{dz} \left(w_c(z) - \frac{\mu_n e^{i\alpha_n}}{z - z_n} \right) \quad (\text{III-18})$$

tem-se, a partir da relação (III-17):

$$\oint_C \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz = - \sum_{n=0}^N \oint_{\gamma_n} \left[f_{cn}(z) - \frac{\mu_n e^{i\alpha_n}}{(z - z_n)^2} \right]^2 dz ,$$

donde

$$\oint_C \left(\frac{dw_c}{dz} \right)^2 dz = - \sum_{n=0}^N \oint_{\gamma_n} \left[\left(f_{cn}(z) \right)^2 - \frac{2\mu_n e^{i\alpha_n} f_{cn}(z)}{(z - z_n)^2} + \frac{\mu_n^2 e^{2i\alpha_n}}{(z - z_n)^4} \right] dz \quad (\text{III-19})$$

Expandindo-se o potencial $f_{cn}(Z)$ em uma Série de Taylor em torno do ponto Z_n , tem-se:

$$f_{cn}(Z) = f_{cn}(Z_n) + (Z - Z_n) \frac{df_{cn}}{dZ}(Z_n) + \frac{(Z - Z_n)^2}{2} \frac{d^2 f_{cn}}{dZ^2}(Z_n) + \dots$$

Substituindo-se esta expressão em (III-19) obtém-se o resíduo em Z_n :

$$\text{Res}(Z_n) = -2 \mu_n e^{i\alpha_n} \frac{df_{cn}}{dZ}(Z_n) \quad (\text{III-20})$$

Aplicando-se o Teorema dos Resíduos (SPIEGEL⁹) à relação (III-19), e utilizando-se do resultado (III-20), obtém-se:

$$\oint_C \left(\frac{dW}{dZ} \right)^2 dZ = 4\pi i \sum_{n=0}^N \mu_n e^{i\alpha_n} \frac{df_{cn}}{dZ}(Z_n) \quad (\text{III-21})$$

Aplicando-se o resultado (III-21) ao contorno \bar{S}_b definido na Figura III-4, tem-se, para o potencial (III-10), a relação:

$$\int_{\bar{S}_b} \left(\frac{dW}{dZ} \right)^2 dZ = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{an} \frac{df_n}{dZ}(\ell_{an})$$

$$\text{onde } \frac{df_n}{dZ}(Z) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{2i\mu_{am}}{(\ell_{an} - \ell_{am})^3} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\mu_{bm}}{(\ell_{an} + \ell_{bm})^3}$$

Entretanto, o m -ésimo termo da série $\mu_{an} \frac{df_n}{dZ}(\ell_{an})$ é $\frac{\mu_{an}\mu_{am}}{(\ell_{an} - \ell_{am})^3}$

e o \underline{n} -ésimo termo da série $\mu_{am} \frac{df_m}{dz}(\ell_{am})$ é $\frac{\mu_{am}\mu_{an}}{(\ell_{am}-\ell_{an})^3}$. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{an} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{am}}{(\ell_{an}-\ell_{am})^3} \right] = 0$$

Então:

$$\oint_{\bar{S}_b} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = -8\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{an} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{bm}}{(\ell_{an}+\ell_{bm})^3} \quad (\text{III-22})$$

Utilizando-se de um desenvolvimento si
milar para o contorno \bar{S}_a , e aplicando-se a relação (III-12), tem-se

$$-\bar{F}_{1a} = \bar{F}_{1b} = 4\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{an}\mu_{bm}}{(\ell_{an}+\ell_{bm})^3} \quad (\text{III-23})$$

onde μ_{an} , μ_{bm} , ℓ_{an} e ℓ_{bm} são definidos de acordo com (III-10).

III.2.1.2 - Cálculo de \bar{F}_2 :

Aplicando-se a relação (III-13) ao po-
tencial (III-10) tem-se:

$$\bar{F}_{2b} = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{S}_b} \bar{W}(z) d\bar{z} \quad (\text{III-24})$$

Entretanto, como $\oint \bar{W} d\bar{z} = \overline{\oint W dz}$,

$$\bar{F}_{2b} = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_{\bar{S}_b} W(z) dz} \quad (\text{III-25})$$

Aplicando-se o Teorema dos Resíduos (SPIEGEL⁹) à integral de $W(Z)$ ao longo do contorno \bar{S}_b , tem-se:

$$\int_{\bar{S}_b} W(Z) dZ = 2\pi i \left(-i \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{bn} \right) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{bn} \quad (\text{III-26})$$

Assim, $\int_{\bar{S}_b} W(Z) dZ$ é real, pois μ_{bn} é real para todo "n". Então,

$$\overline{\int_{\bar{S}_b} W(Z) dZ} = \int_{\bar{S}_b} W(Z) dZ$$

Aplicando-se desenvolvimento similar para o contorno \bar{S}_a , obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{2a} &= -i2\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mu_{an}}{dt} \\ \bar{F}_{2b} &= -i2\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mu_{bn}}{dt} \end{aligned} \right] \quad (\text{III-27})$$

onde μ_{an} e μ_{bn} são definidos de acordo com (III-10).

III.2.1.3 - Cálculo de \bar{F}_3 :

Considerando-se a expressão (II-12) e aplicando-se (III-14) às fronteiras \bar{S}_a e \bar{S}_b , tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{3a} &= i\pi\rho \frac{d\mu_{ao}}{dt} \\ \bar{F}_{3b} &= i\pi\rho \frac{d\mu_{bo}}{dt} \end{aligned} \right] \quad (\text{III-28})$$

onde μ_{ao} e μ_{bo} são definidos de acordo com (III-10).

III.2.1.4 - Resultante das Forças:

Observando-se os resultados (III-23), (III-27) e (III-28), pode-se dizer que a força resultante exercida nos cilindros \vec{e} , por unidade de comprimento dos mesmos, dada por

$$F_a = F_{ax} + iF_{ay}$$

$$\text{onde } \left\{ \begin{array}{l} F_{ax} = -4\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{an}\mu_{bm}}{(\ell_{an} + \ell_{bm})^3} \\ F_{ay} = 2\pi\rho \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mu_{an}}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\mu_{a0}}{dt} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III-29})$$

e

$$F_b = F_{bx} + iF_{by}$$

$$\text{onde } \left\{ \begin{array}{l} F_{bx} = 4\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_{an}\mu_{bm}}{(\ell_{an} + \ell_{bm})^3} \\ F_{by} = 2\pi\rho \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mu_{bn}}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\mu_{b0}}{dt} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III-30})$$

Assim, os esforços definidos pela relação (III-23) determinam uma "atração" entre os cilindros, gerada pelo movimento dos mesmos. Os esforços determinados por (III-27) e (III-28) têm a mesma direção do movimento dos cilindros, e a componente destes esforços, definida por (III-28), representa a força hidrodinâmica atuante em um dos cilindros, se o mesmo estivesse se movimentando individualmente em uma região fluida in

finita. A componente determinada por (III-27) "corrige" a força na direção do movimento, em face da presença de outro cilindro.

Mediante uma análise da ordem de grandeza das forças F_x e F_y , através da utilização das relações (III-10) e (III-11), pode-se observar que:

$$F_x = O(\bar{\eta}^2)$$

e

$$F_y = O(\bar{\eta})$$

onde $\bar{\eta}$ é definido segundo (II-17).

Entretanto, como o potencial complexo (III-10) representa uma aproximação para a solução do problema (II-15), que apresenta erros da ordem de $\bar{\eta}^2$, então a força de "atração" entre os cilindros obtida através da equação (III-23), apresenta erros de sua própria ordem de grandeza, i.é., $O(\bar{\eta}^2)$. Isto se deve ao fato de que a dedução da Equação de Blasius generalizada para regimes transientes, equação (III-11), é obtida a partir da integração da Equação de Bernoulli (II-16) sobre o contorno; a força parcial F_1 , definida segundo (III-12), é determinada a partir da integração dos termos quadráticos, ϕ_x^2 e ϕ_y^2 , da equação (II-16). Se na referida integração, fosse utilizada a forma "linearizada" da Equação de Bernoulli, equação (II-30), então a força parcial F_1 não estaria presente na relação (III-11), ou seja, a força de "atração" entre os cilindros seria nula.

III.2.2 - Coefficientes de Massa Adicional

Definindo-se os potenciais complexos $W_a(Z,t)$ e $W_b(Z,t)$ através das expressões

$$W_a(Z,t) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_a(2n)}{Z - \ell_a(2n)} + \frac{\mu_b(2n+1)}{Z + \ell_b(2n+1)} \quad (\text{III-31})$$

e

$$W_b(Z,t) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_b(2n)}{Z + \ell_b(2n)} + \frac{\mu_a(2n+1)}{Z - \ell_a(2n+1)} \quad (\text{III-32})$$

tem-se, de acordo com as relações (II-40) e (III-10),

$$W(Z,t) = W_a(Z,t) + W_b(Z,t) \quad (\text{III-33})$$

Assim, os potenciais ϕ_a e ϕ_b definidos em (II-40) são as partes reais dos potenciais complexos W_a e W_b , respectivamente.

Os coeficientes de massa adicional definidos em (II-45) e (II-46) podem ser então calculados ao se aplicar as expressões (III-31) e (III-32) às relações (III-29) e (III-30), tendo-se em vista as expressões (II-43) e (II-44). Assim, os coeficientes M_{aay} , M_{aby} , M_{bay} e M_{bby} , relacionados em (II-46), podem ser obtidos através do conhecimento das forças F_{aay} , F_{aby} , F_{bay} e F_{bby} , relacionadas em (II-43), calculadas através da aplicação dos potenciais complexos W_a e W_b às relações (III-29) e (III-30). Como os esforços de atração entre os cilindros (F_{ax} e F_{bx}) são nulos ao se considerar o problema linearizado (ver item III.2.1.4), então, para este caso, os coeficientes M_{aax} , M_{abx} , M_{bax} e M_{bbx} são também nulos.

IV - SOLUÇÃO NUMÉRICA

IV.1 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Segundo BREBBIA e WALKER¹⁰, uma aproximação para a solução da equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

definida no domínio D, delimitado pelo contorno C, pode ser obtida, para pontos discretos deste domínio, a partir da aplicação de técnicas de aproximação por funções de Green.

Para o caso plano, as referidas técnicas de aproximação podem ser aplicadas, fornecendo a relação (ver Apêndice 3),

$$a_i \phi(Z_i) = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} w_i dC - \int_C \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} dC, \quad (\text{IV-1})$$

onde w_i representa a função de Green a ser utilizada para o ponto Z_i e a constante a_i é dada por

$$\begin{cases} a_i = 1, & \text{para } Z_i \text{ no interior do domínio D} \\ a_i = \frac{1}{2}, & \text{para } Z_i \text{ sobre o contorno C} \end{cases}$$

A função de Green deve satisfazer a equação de Laplace e a relação $|\nabla w_i| \rightarrow 0$, quando $|Z| \rightarrow \infty$, sendo, para o caso plano, dada por:

$$w_i(Z) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|Z - Z_i|} \right) \quad (\text{IV-2})$$

A função w_i definida por (IV-2) representa uma fonte de intensida

de unitária localizada no ponto z_i .

Para um problema genérico, o contorno C pode ser subdividido em duas partes, C_a e C_b , onde se tem condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, i.é., se conhece o valor de ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, respectivamente.

Em sua concepção fundamental, o método dos elementos de contorno consiste em se subdividir o contorno C em elementos, nos quais o comportamento da função ϕ pode ser aproximado por funções conhecidas. O caso mais simples surge ao se definir um comportamento constante para ϕ ao longo de elementos "retilíneos" (elementos de raio de curvatura infinito).

Assim, subdividindo-se o contorno C em N elementos retilíneos de ϕ constante, tem-se, para um ponto z_i qualquer deste contorno, a relação:

$$\frac{1}{2} \phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \int_{C_j} w_i dC - \sum_{j=1}^N \phi_j \int_{C_j} \frac{\partial w_i}{\partial n} dC \quad (IV-3)$$

onde $\phi_i = \phi(z_i)$ e $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$ = valor de $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ no elemento j . Aqui, os valores de ϕ_j são conhecidos para os elementos do contorno C_a e os valores de $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$ são conhecidos para os elementos do contorno C_b .

Adotando-se a nomenclatura

$$G_{ij} = \int_{C_j} w_i dC \quad \text{e} \quad \hat{H}_{ij} = \int_{C_j} \frac{\partial w_i}{\partial n} dC \quad (IV-4)$$

tem-se, para os pontos do contorno C , a relação:

$$\frac{1}{2} \phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} G_{ij} - \sum_{j=1}^N \phi_j \hat{H}_{ij}$$

$$\text{Introduzindo } H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & \text{para } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}, & \text{para } i=j \end{cases} \quad (IV-5)$$

tem-se:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \quad (IV-6)$$

ou seja:

$$[H_{ij}] \{\phi_j\} = [G_{ij}] \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right\} \quad (IV-7)$$

onde $[H_{ij}]$ é a matriz dos elementos H_{ij} , $\{\phi_j\}$ é o vetor formado pelos elementos ϕ_j , $[G_{ij}]$ é a matriz dos elementos G_{ij} , e $\left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right\}$ é o vetor formado pelos elementos $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$. Aqui, são conhecidos os elementos ϕ_j para o contorno C_a e também são conhecidos os elementos $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$ para o contorno C_b . Assim o sistema matricial (IV-7) pode ser reduzido a:

$$[A_{ij}] \{x_j\} = \{b_i\}$$

onde

$$A_{ij} = \begin{cases} H_{ij}, & \text{se } C_j \in C_b \\ -G_{ij}, & \text{se } C_j \in C_a \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} \phi_j, & \text{se } C_j \in C_b \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial n}, & \text{se } C_j \in C_a \end{cases} \quad (IV-8)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^N k_{ij} , \quad k_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} -H_{ij} \cdot \phi_j , \text{ se } C_j \in C_a \\ G_{ij} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial n} , \text{ se } C_j \in C_b \end{array} \right.$$

A resolução do problema (IV-8) fornece uma solução aproximada para ϕ , em todo o contorno C . A solução para os pontos interiores de D pode ser obtida através da expressão (IV-1), i.é.,

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \cdot G_{ij} - \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot H_{ij} \quad (IV-9)$$

A única dificuldade para se resolver o sistema (IV-8) consiste na avaliação das integrais G_{ij} e \hat{H}_{ij} . Para o caso de elementos retilíneos onde ϕ é constante, no entanto, tais integrais podem ser avaliadas analiticamente (ver Apêndice 4) de maneira simples.

IV.2 - APLICAÇÃO DO MÉTODO AO PROBLEMA PROPOSTO

Uma solução aproximada para o problema (II-29) pode ser obtida ao se aplicar a formulação do método dos elementos de contorno, descrita no item anterior, ao contorno S definido pela Figura (II-2). Assim procedendo, tem-se, para qualquer ponto Z_i da região fluida, a seguinte relação:

$$a_i \phi_i = \int_{\bar{S}_a + \bar{S}_b} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} w_i - \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \right] ds + \int_{S_\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} w_i - \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \right] ds \quad (IV-10)$$

$$\text{onde } \begin{cases} a_i = 1 & , \quad \text{para } z_i \text{ no interior da região fluida} \\ a_i = \frac{1}{2} & , \quad \text{para } z_i \text{ sobre o contorno } S. \end{cases}$$

Entretanto, exigindo-se que $\phi \rightarrow 0$, para $|z| \rightarrow \infty$, tem-se, através das expressões (IV-2) e (IV-10):

$$\int_{S_\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} w_i - \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \right] ds = - \lim_{|z_i| \rightarrow \infty} \int_{\bar{S}_a + \bar{S}_b} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|z - z_i|} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{1}{|z - z_i|} \phi \right] ds$$

Expandindo-se a função $\ln \left(\frac{1}{|z - z_i|} \right)$ em uma Série de McLaurin, e observando-se que os limites dos termos que envolvem suas derivadas são nulos para $|z_i| \rightarrow \infty$, então pode-se dizer que:

$$\int_{S_\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} w_i - \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \right] ds = - \frac{1}{2\pi} \lim_{|z_i| \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{|z_i|} \right) \int_{\bar{S}_a + \bar{S}_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

$$\text{Como } \int_{\bar{S}_a} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \int_{\bar{S}_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0 \quad , \quad \text{então:}$$

$$\int_{S_\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} w_i - \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \right] ds = 0 \quad \quad \quad (\text{IV-11})$$

Assim, a formulação do método aplicada ao problema em questão define o seguinte processo de solução do PVC (II-29):

19) Subdivisão das superfícies \bar{S}_a e \bar{S}_b em N elementos retilíneos onde se considera ϕ constante ao longo de cada um deles. Mediante o conhecimento prévio do movimento dos cilindros, determina-se o valor de $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ para cada um dos elementos de \bar{S}_a e \bar{S}_b .

2º) Avalia-se então as integrais \hat{H}_{ij} e G_{ij} , conforme indicado no Apêndice 4, para cada ponto z_i localizado no ponto médio de cada um dos elementos do contorno " $\bar{S}_a + \bar{S}_b$ ".

3º) Resolve-se então o sistema matricial definido em (IV-8), determinando-se os valores de ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ para todos os elementos do contorno " $\bar{S}_a + \bar{S}_b$ ".

4º) A determinação do potencial ϕ em qualquer ponto z_i no interior da região fluida pode ser feita através da relação (IV-9).

IV.3 - MASSA ADICIONAL

O esforço hidrodinâmico exercido pelo fluido nas superfícies \bar{S}_a e \bar{S}_b , por unidade de comprimento dos cilindros, pode ser calculado segundo (II-32) e (II-33), respectivamente, ao se conhecer a distribuição de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ nesses contornos. Essa distribuição pode ser obtida através da derivação da equação (II-40) com relação ao tempo, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(z,t) = - \left[\phi_{a_s}(z) \cdot \omega_a \cdot \text{sen}(\omega_a t) + \phi_{b_s}(z) \cdot \omega_b \cdot \text{sen}(\omega_b t + \delta) \right], \quad (\text{IV-12})$$

onde os potenciais parciais ϕ_{a_s} e ϕ_{b_s} podem ser obtidos a partir da solução numérica dos PVC's (II-34) e (II-35), para $t=0$ e $t = -\delta/\omega_b$, respectivamente.

Conhecendo-se, assim, as forças hidrodinâmicas atuantes, os coeficientes de massa adicional podem ser obtidos através da aplicação das mesmas às equações (II-43), (II-44), (II-45) e (II-46).

Para um caso geral, onde a dependência de ϕ com o tempo não é explicitamente conhecida, os esforços sobre os cilindros podem ser calculados para um determinado instante de tempo t_0 , de acordo com o seguinte método:

Considerando-se que a função $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ satisfaz a equação de Laplace, e que $\left| \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \rightarrow 0$ para $|z| \rightarrow \infty$, o valor de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ pode ser determinado para todos os elementos do contorno, através do método dos elementos de contorno, se forem conhecidos os valores de $\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}{\partial n}$ nesses elementos. Entretanto,

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}{\partial n} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} \quad (\text{IV-13})$$

onde \vec{v}_n é a velocidade do fluido normal à superfície do corpo.

Assim, conhecendo-se as acelerações instantâneas dos corpos, os valores de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ para cada elemento do contorno podem ser conhecidos ao se solucionar o sistema (IV-8), onde o vetor $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}$ é substituído por $\left\{ \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} \right\}$ e o vetor incógnito $\{\phi\}$ por $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\}$.

V - RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e analisados os resultados obtidos através da aplicação do método analítico (desenvolvido no Capítulo III) e do método numérico (desenvolvido no Capítulo IV) na determinação da solução para o problema definido no Capítulo II. Foram comparados os valores dos coeficientes de massa adicional do problema, calculados segundo os dois métodos acima mencionados.

V.1 - OBTENÇÃO DOS RESULTADOS

Os valores dos coeficientes de massa adicional foram obtidos a partir das soluções para os potenciais ϕ_{a_s} e ϕ_{b_s} , definidos em (II-34) e (II-35), através das relações (II-45) e (II-46).

As soluções analíticas para ϕ_{a_s} e ϕ_{b_s} foram calculadas através da aplicação direta da série infinita (III-10), truncando-se a mesma quando o termo N+1 desta apresentava um acréscimo relativo menor que 1%, ou seja, quando

$$\frac{\frac{\mu_{a(N+1)}}{Z-\ell_{a(N+1)}} + \frac{\mu_{b(N+1)}}{Z+\ell_{b(N+1)}}}{\sum_{n=0}^N \left(\frac{\mu_{an}}{Z-\ell_{an}} + \frac{\mu_{bn}}{Z+\ell_{bn}} \right)} < 0,01$$

As soluções numéricas para ϕ_{a_s} e ϕ_{b_s} foram calculadas ao se subdividir o contorno de cada um dos ci

lindros, "a" e "b", em 40 elementos retilíneos de potencial constante, conforme mostra a Figura V-1. Os valores de $\frac{\partial \phi_{a_s}}{\partial n}$ e $\frac{\partial \phi_{b_s}}{\partial n}$ em cada elemento, necessários à solução pelo método numérico, foram obtidos a partir das relações (II-9) e (II-12). De maneira a se observar o comportamento dos resultados numéricos com relação ao tamanho dos elementos definidos no contorno, subdividiu-se posteriormente as superfícies dos cilindros em elementos menores, de acordo com a Figura V-2.

O comportamento dos coeficientes de massa adicional, calculados analiticamente e numericamente, está representado nas Figuras V-3, V-4 e V-5, como uma função da variável adimensional $\left[1 - \frac{r_a + r_b}{\ell_a + \ell_b} \right]$ (que é nula quando os cilindros estão em contato e tende a 1 quando $[\ell_a + \ell_b] \rightarrow \infty$). A Figura V-3 apresenta uma comparação entre os valores dos coeficientes M_{aay} , M_{aby} , M_{bay} e M_{bby} (calculados analiticamente), para cilindros de mesmo raio. As Figuras V-4 e V-5 apresentam uma comparação entre os valores obtidos analiticamente e numericamente dos coeficientes M_{aay} , M_{bby} e M_{aby} , M_{bay} , respectivamente, para várias razões entre os raios dos cilindros "a" e "b". A Figura V-6 apresenta o comportamento do erro percentual dos valores dos coeficientes de massa adicional obtidos numericamente, com relação aos valores obtidos analiticamente, para o caso de cilindros de mesmo raio.

Uma idéia do comportamento das forças de atração entre os cilindros e a comparação da ordem de grandeza destas com as forças hidrodinâmicas exercidas na direção do movimento dos mesmos podem ser obtidas, para o caso de cilindros

de mesmo raio, através da Figura V-7. Os valores calculados para as forças de atração apresentam erros da ordem de grandeza de $\bar{\eta}^2$, de acordo com os comentários do Capítulo II, por ser o potencial calculado, uma solução para o problema linearizado. Entretanto, mesmo apresentando erros de tal ordem de grandeza, o comportamento global dos resultados obtidos para essas forças é, ainda, representativo.

Informações adicionais a respeito do comportamento dos métodos de elementos de contorno podem ser obtidas no Apêndice 1, onde são comparadas as soluções calculadas para o caso de um cilindro imerso em meio fluido, circundado por um envoltório também cilíndrico, conforme mostra a Figura A1-1.

V.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados indicados nos gráficos das Figuras V-3, V-4 e V-5 apresentam uma tendência assintótica para $L \rightarrow 1$ compatível com os resultados conhecidos para o caso de um cilindro único imerso em meio fluido infinito (ROBERTSON⁵). As regiões dos referidos gráficos onde $L \ll 1$ não apresentam resultados significativos para os casos reais, pois a influência da viscosidade do fluido aumenta muito com a proximidade dos cilindros, não podendo mais ser desprezada conforme estabelecido pela hipótese (II-5). Assim, quanto maior forem as frequências de vibração dos cilindros, maior deverá ser a faixa não significativa de tais gráficos, uma vez que as altas frequências provocam elevados gradientes de velocidade, aumentando, assim, a in

fluência da viscosidade do fluido.

Os esforços de atração entre os cilindros, gerados pelo movimento dos mesmos, são de ordem de grandeza inferior à dos esforços hidrodinâmicos aplicados na direção do movimento (ver Figura V-7). Tais resultados são compatíveis com o comportamento esperado, tendo-se em vista as equações (III-29) e (III-30). De acordo com tais equações, os esforços de atração são funções das velocidades de translação dos cilindros, enquanto que os esforços na direção do movimento são proporcionais às acelerações dos mesmos. Torna-se interessante observar que, segundo os comentários apresentados no Capítulo III, as forças de atração entre os cilindros são nulas quando se utiliza a Equação de Bernoulli linearizada (II-30) para o cálculo das forças hidrodinâmicas segundo (II-31).

O comportamento geral do método numérico utilizado é bastante satisfatório com relação aos valores obtidos analiticamente. A Figura V-6 indica que os erros percentuais apresentados por tal método são compatíveis com os erros apresentados pelos vários métodos numéricos utilizados no campo da hidrodinâmica.

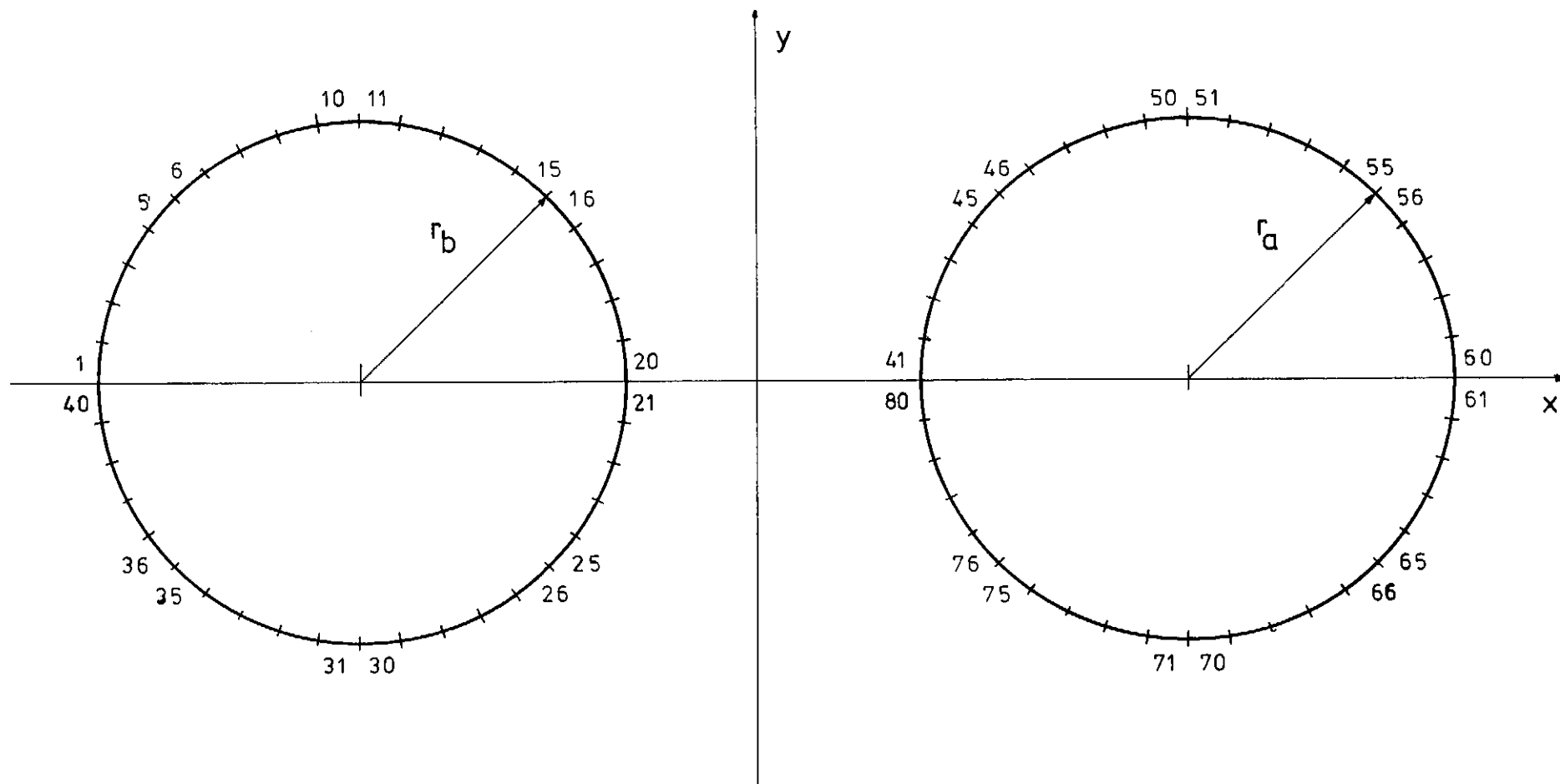


FIGURA V.1 - Modelo de discretização (80 elementos)

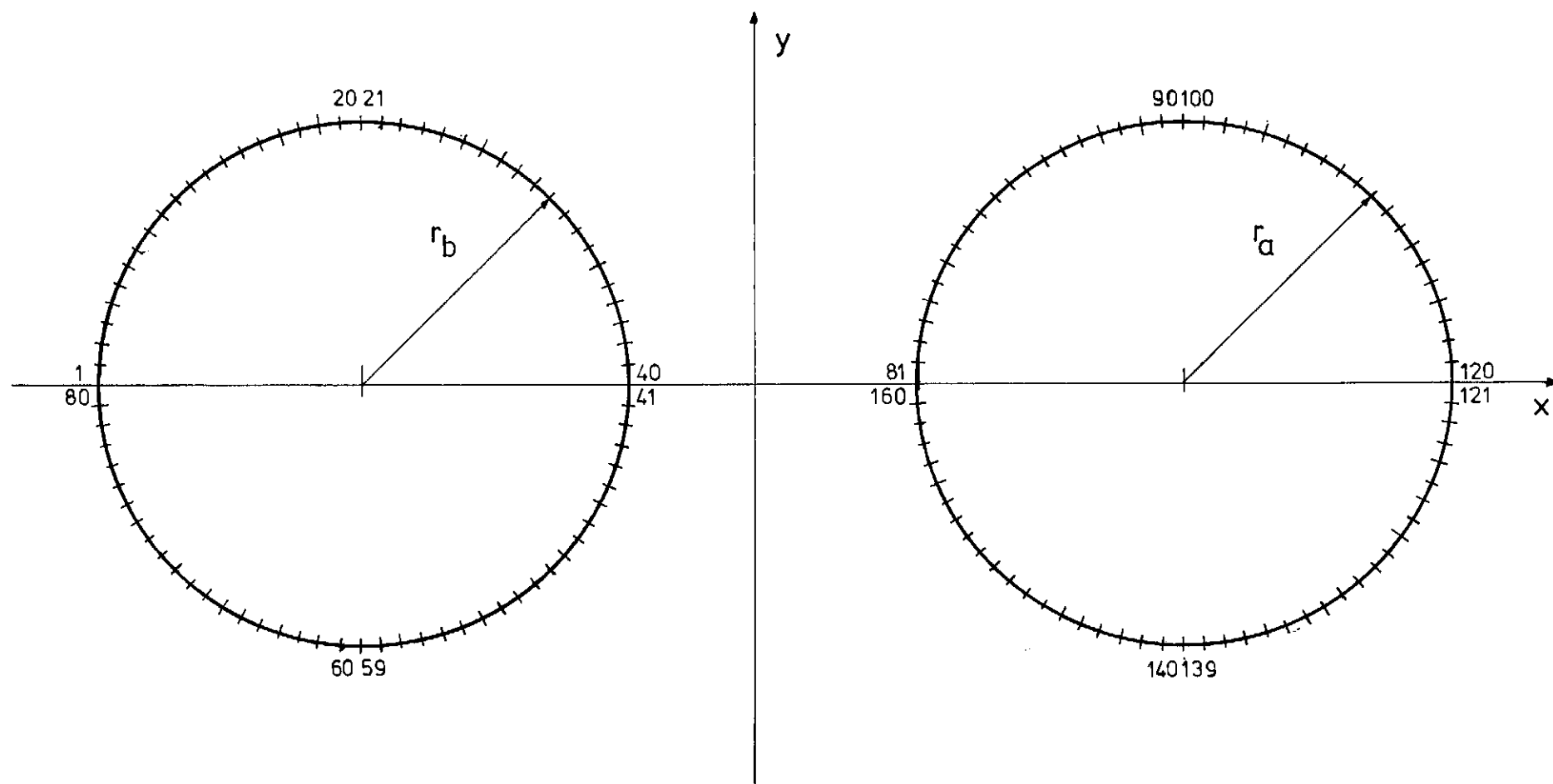


FIGURA V.2 - Modelo de discretização (160 elementos)

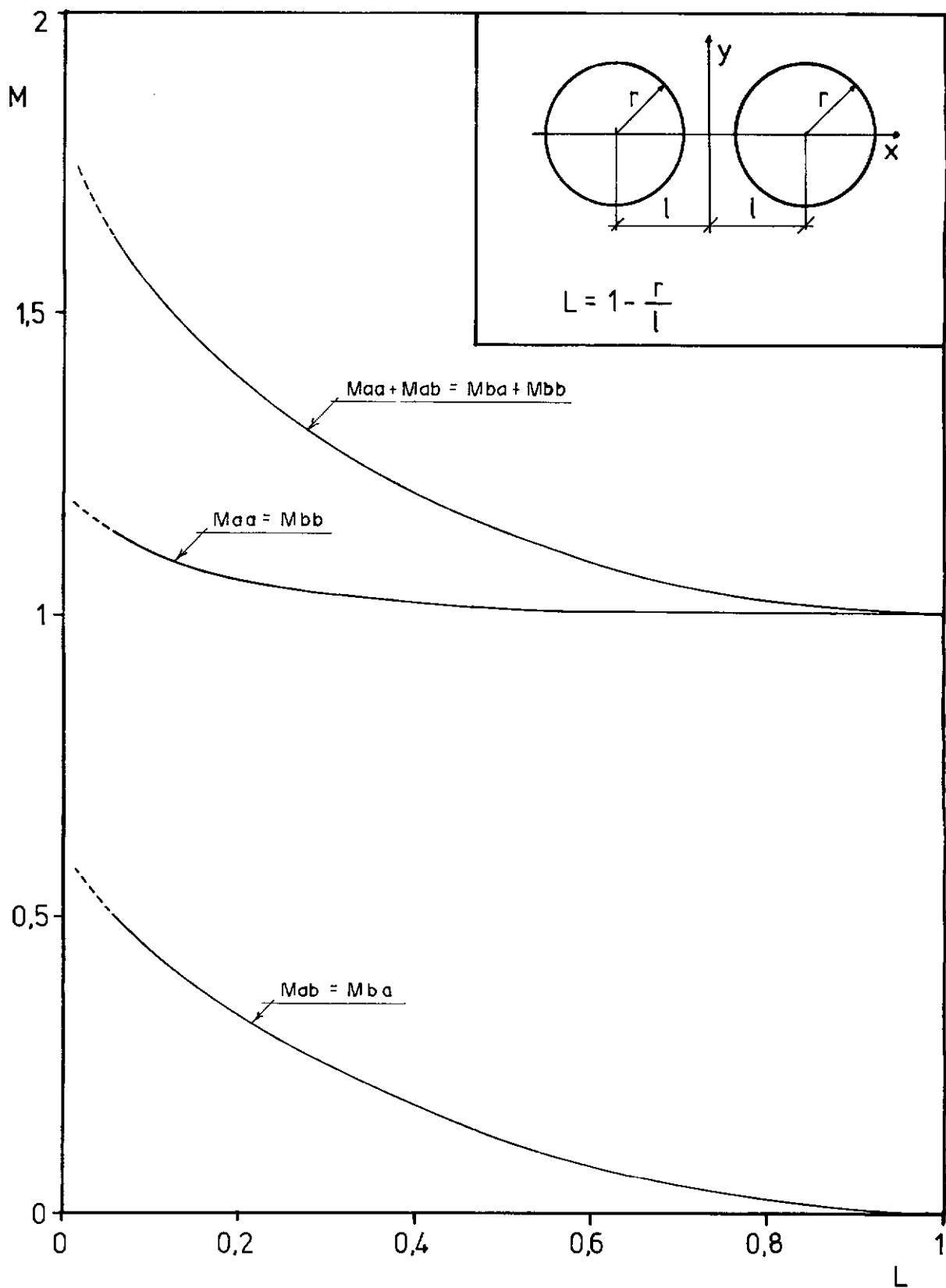


FIGURA V.3 - Coeficientes de massa adicional
(solução analítica)

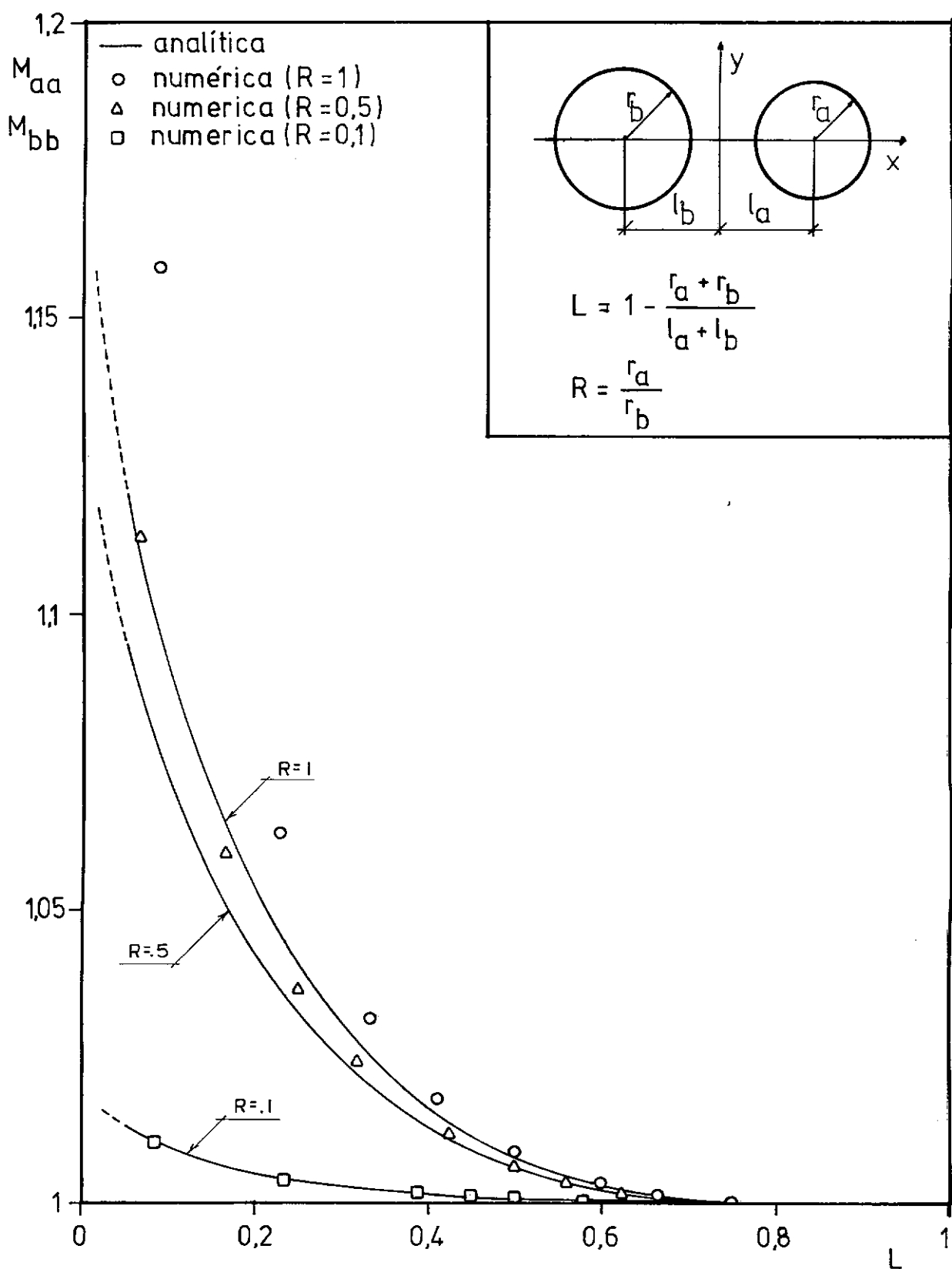


FIGURA V.4 - Soluções para M_{aa} e M_{bb}

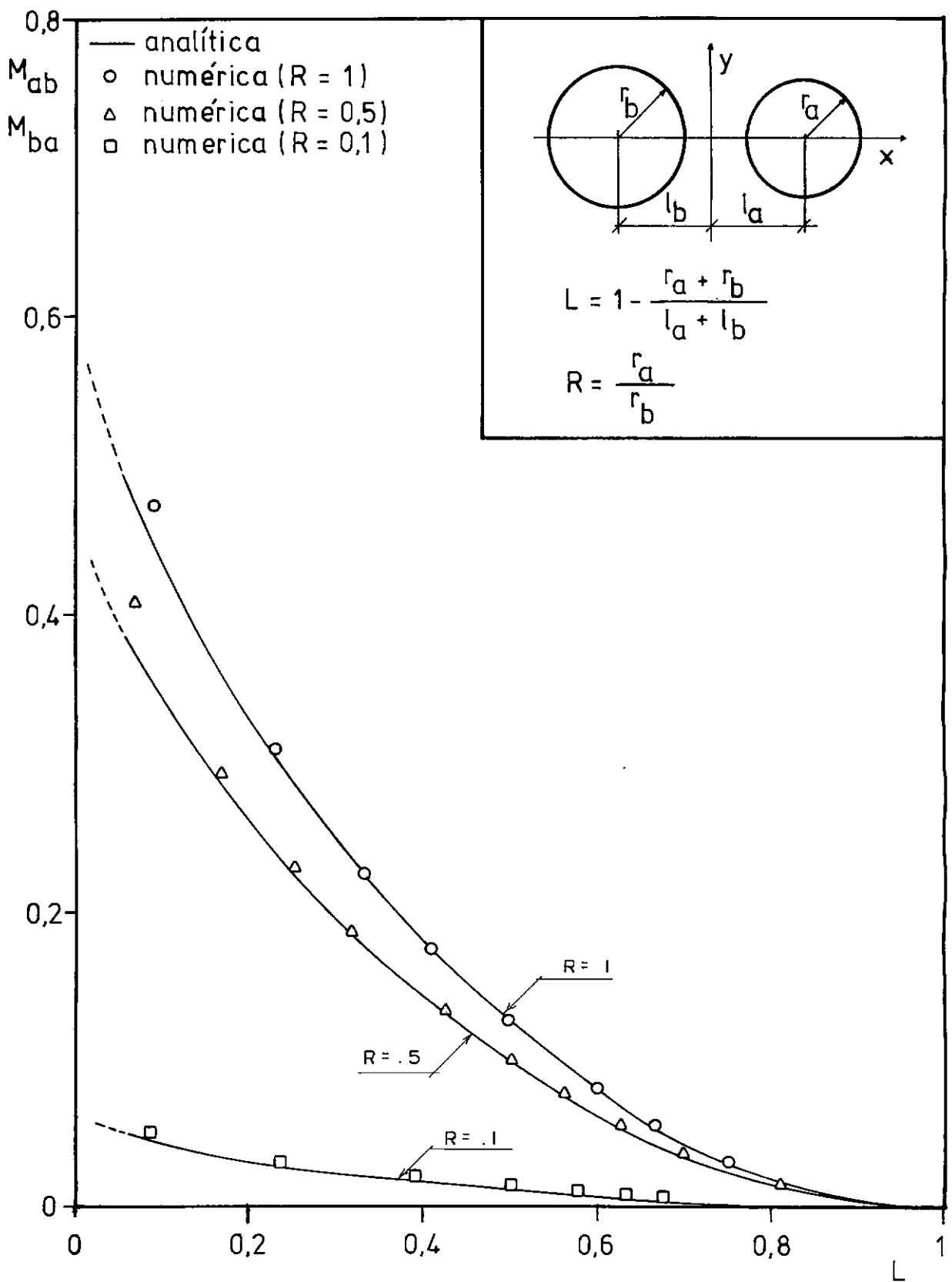


FIGURA V.5 - Soluções para M_{ab} e M_{ba}

$r_a = r_b$	M.E.C. (80 elementos)		M.E.C (160 elementos)	
L	$e_{aa} = e_{bb}$	$e_{ab} = e_{ba}$	$e_{aa} = e_{bb}$	$e_{ab} = e_{ba}$
0,09	5,5316	5,8268	5,6240	6,1806
0,23	1,6376	1,0904	1,6645	1,1560
0,33	0,6373	0,1626	0,6479	0,1715
0,41	0,2858	- 0,1151	0,2905	- 0,1120
0,50	0,1016	- 0,2445	0,1030	- 0,2423
0,60	0,0232	- 0,2935	0,0259	- 0,2917
0,66	0,0067	- 0,3038	0,0068	- 0,3032
0,75	0,0007	- 0,3068	0,0007	- 0,3066

$$e_{ij} = \frac{M_{ij}(\text{númeroico}) - M_{ij}(\text{analítico})}{M_{ij}(\text{analítico})} \times 100$$

$$L = 1 - \frac{r_a + r_b}{e_a + e_b}$$

FIGURA V.6 - Erros Percentuais

$r_a = r_b$								
L	0,09	0,23	0,33	0,41	0,50	0,60	0,66	0,75
$F_{aax_s} = F_{bbx_s}$	0,1811	0,0569	0,0239	0,0117	0,0048	0,0015	0,0006	0,0001
$F_{abx_s} = F_{bax_s}$	0,0933	0,0356	0,0169	0,0089	0,0039	0,0013	0,0005	0,0001
$F_{aay_s} = F_{bby_s}$	1,0980	1,0458	1,0252	1,0151	1,0079	1,0032	1,0015	1,0005
$F_{aby_s} = F_{bay_s}$	0,4463	0,3052	0,2258	0,1746	0,1256	0,0801	0,0556	0,0313

$$F_{aax} = \pi \cdot F_{aax_s} \cdot \bar{\eta}_a \cdot \omega_a \cdot \cos(\omega_a t)$$

$$F_{abx} = \pi \cdot F_{abx_s} \cdot \bar{\eta}_b \cdot \omega_b \cdot \cos(\omega_b t + \delta)$$

$$F_{bax} = \pi \cdot F_{bax_s} \cdot \bar{\eta}_a \cdot \omega_a \cdot \cos(\omega_a t)$$

$$F_{bbx} = \pi \cdot F_{bbx_s} \cdot \bar{\eta}_b \cdot \omega_b \cdot \cos(\omega_b t + \delta)$$

$$F_{aay} = - \pi \cdot F_{aay_s} \cdot \bar{\eta}_a \cdot \omega_a^2 \cdot \sin(\omega_a t)$$

$$F_{aby} = - \pi \cdot F_{aby_s} \cdot \bar{\eta}_b \cdot \omega_b^2 \cdot \sin(\omega_b t + \delta)$$

$$F_{bay} = - \pi \cdot F_{bay_s} \cdot \bar{\eta}_a \cdot \omega_a^2 \cdot \sin(\omega_a t)$$

$$F_{bby} = - \pi \cdot F_{bby_s} \cdot \bar{\eta}_b \cdot \omega_b^2 \cdot \sin(\omega_b t + \delta)$$

FIGURA V-7 - Forças em x e y

VI - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os resultados obtidos e analisados no Capítulo V representam boas referências com relação ao comportamento computacional do Método dos Elementos de Contorno. A Figura V-6 indica que o número de elementos de contorno necessário a uma boa precisão dos resultados obtidos é, relativamente, pequeno.

O processo numérico de cálculo dos coeficientes de massa adicional através do MEC pode ser estendido aos casos onde se tem "N" corpos imersos em regiões fluidas passíveis de serem definidas por condições de contorno linearizáveis, pois as expressões (II-34), (II-35) e (II-36) indicam que o potencial solução para tais casos é dado pela soma dos potenciais parciais ϕ_n definidos como se segue:

$$\phi_n \text{ é solução de } \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi_n = 0, \text{ na região fluida} \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial n} = \dot{\eta}_n \cdot \vec{n}, \text{ no contorno médio do corpo "n"} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial n} = 0, \text{ no contorno médio do corpo "m", para} \\ \quad m = 1, 2, \dots, N \text{ e } m \neq n \\ + \text{Condições de contorno linearizadas que definem as} \\ \quad \text{fronteiras da região fluida onde estão imersos os} \\ \quad \text{"N" corpos.} \end{array} \right.$$

Assim, para o caso de "N" corpos, tem-se:

$$\phi = \sum_{n=1}^N \phi_n$$

Soluções analíticas para os potenciais ϕ_n , quando existentes, são de obtenção praticamente inviável em face do trabalho de cálculo exigido.

Desta maneira, na análise do comportamento dinâmico de estruturas submersas redutíveis a problemas linearizados envolvendo vários corpos, o Método dos Elementos de Contorno pode ser utilizado na obtenção das matrizes de massa adicional a serem introduzidas na equação geral do movimento (I-1), através da relação (II-42). A combinação de tais expressões fornece a equação do movimento para o caso de grupos de corpos imersos em fluidos incompressíveis de viscosidade desprezível:

$$[M_v]\{\ddot{\eta}\} + [C]\{\dot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = \{F_e\}$$

onde $[M_v]$ é a matriz das massas virtuais, resultante da combinação das matrizes $[M]$ e $[M']$, e $\{F_e\}$ o vetor das forças externas de excitação dos corpos.

No método numérico apresentado neste trabalho são utilizados elementos retilíneos, onde o potencial ϕ é considerado constante. Tais simplificações introduzem erros na solução obtida, por determinarem um comportamento descontínuo do potencial ϕ ao longo dos contornos dos cilindros, e por substituírem os contornos circulares dos mesmos por poliedros regulares. A formulação do Método dos Elementos de Contorno, entretanto, não impõe tais condições ao modelo de discretização a ser utilizado. Os elementos podem ser curvilíneos, de raio de curvatura variável, e podem ser definidos diversos tipos de fun

ções para se prescrever o comportamento de ϕ ou de $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ ao longo de cada elemento. A utilização de distribuições polinomiais para ϕ ao longo de elementos que acompanham a curvatura dos contornos dificulta a avaliação das integrais G_{ij} e H_{ij} (ver Apêndice 4), mas promove uma distribuição mais "suave" de ϕ nas fronteiras discretizadas, exigindo-se assim um número menor de elementos de contorno. A introdução de tais modificações implica, na maioria dos casos, na necessidade de se utilizar métodos numéricos de integração na avaliação de G_{ij} e H_{ij} (BREBBIA & WALKER¹⁰).

Assim, a aplicação do Método dos Elementos de Contorno aos escoamentos de fluidos incompressíveis e sem viscosidade apresenta, geralmente, boa precisão de resultados, utilizando-se de uma quantidade relativamente pequena de cálculo computacional.

APÊNDICE 1 - PROBLEMA SUPLEMENTAR

Al.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA SUPLEMENTAR

Em adição aos resultados apresentados no Capítulo V, um outro problema de grupos de corpos submersos foi também analisado através do Método dos Elementos de Contorno: a vibração forçada de um cilindro imerso em meio fluido, circundado por um envoltório também cilíndrico, conforme mostra a Figura Al-1. A análise de tal problema representa um primeiro estudo sobre a aplicação dos referidos métodos numéricos aos problemas de grupos de corpos imersos em regiões fluidas finitas.

Para a solução do problema apresentado foram consideradas hipóteses semelhantes às relacionadas no Capítulo II, reduzindo-se o mesmo à determinação de um Potencial Complexo. A distribuição deste potencial foi determinada através do método numérico apresentado no Capítulo IV, utilizando-se a distribuição dos elementos de contorno apresentada na Figura Al-1.

Al-2 - RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos para os coeficientes de massa adicional, para o caso de uma configuração típica, estão relacionados na Figura Al-2, juntamente com os valores analíticos apresentados por CHUNG e CHEN⁴. A solução fornecida por tais autores baseia-se na suposição de que o potencial solu

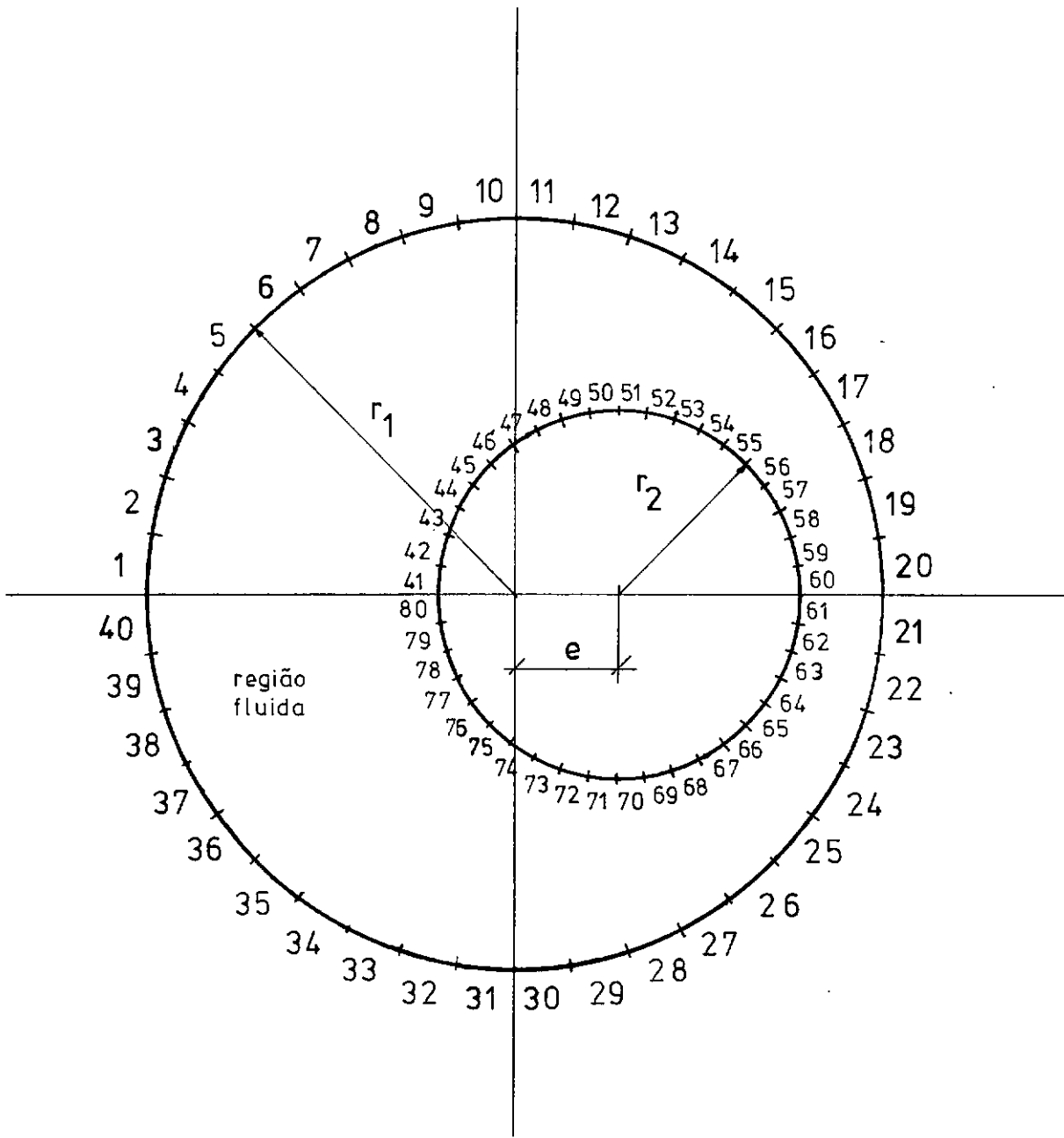


FIGURA A1.1 - Modelo de discretização

ção do problema é constituído pela soma dos potenciais parciais ϕ_a e ϕ_b definidos como se segue:

$$\phi_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_a^n}{R_a^{n-1}} \left[\alpha_{an} \cos(n\phi_a) + \beta_{an} \sin(n\phi_a) \right]$$

e

$$\phi_b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_b^{n+1}}{r_b^n} \left[\alpha_{bn} \cos(n\phi_b) + \beta_{bn} \sin(n\phi_b) \right] ,$$

onde (r_a, ϕ_a) são as coordenadas cilíndricas relativas ao centro de R_a e (r_b, ϕ_b) são as coordenadas cilíndricas relativas ao centro de R_b . Os coeficientes α_{an} , α_{bn} , β_{an} e β_{bn} são constantes arbitrárias determinadas através das condições de contorno impostas ao problema, i.é.,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r_a} \right|_{r_a=R_a} = v_{na} , \quad e \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r_b} \right|_{r_b=R_b} = v_{nb}$$

onde v_{na} e v_{nb} são as projeções normais da velocidade junto às superfícies de R_a e R_b , respectivamente.

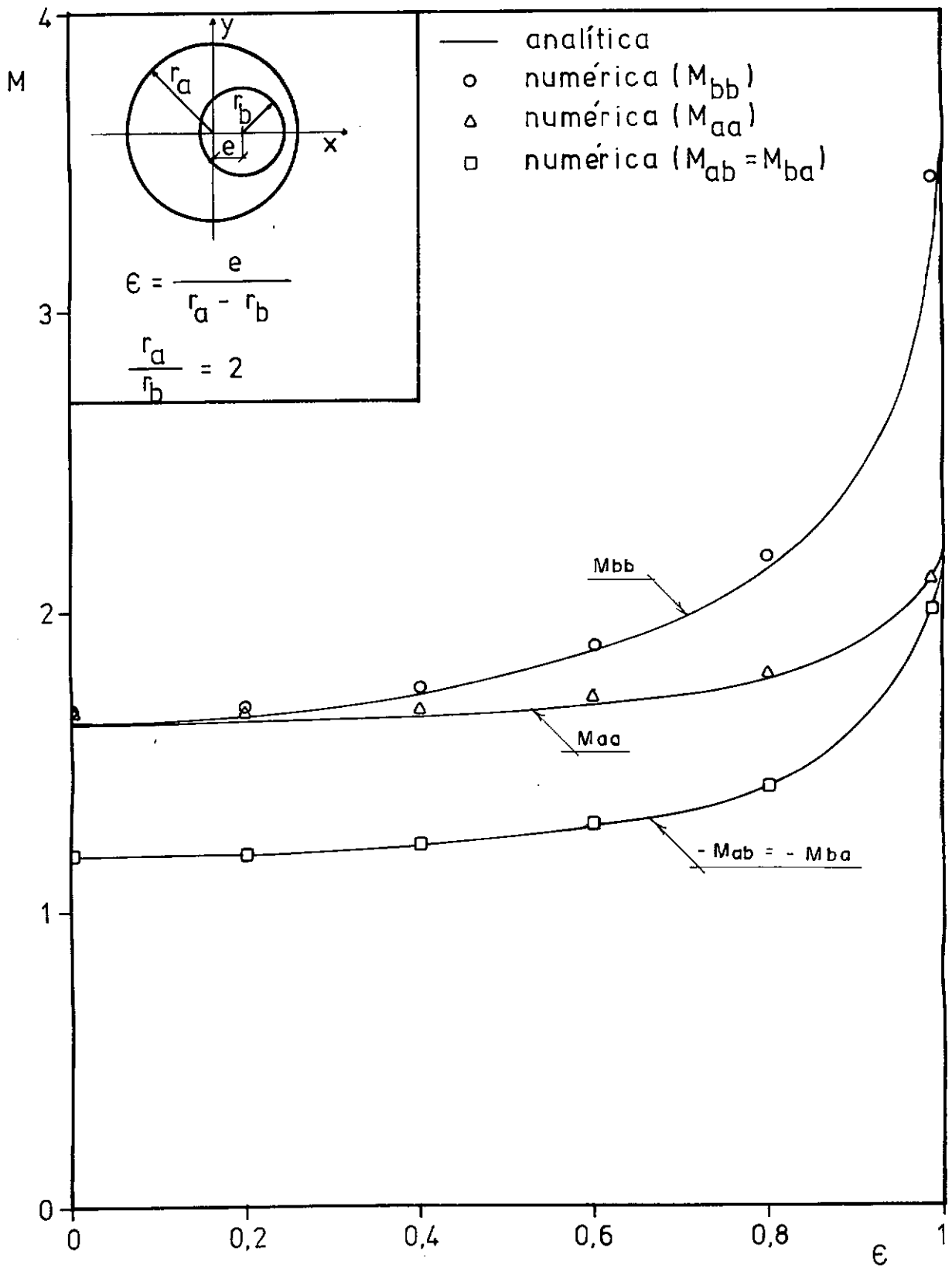


FIGURA A1.2 - Coeficientes de massa adicional

APÊNDICE 2 - RELAÇÕES ENTRE AS GRANDEZAS DIMENSIONAIS E ADI-
MENSIONAIS

Utilizando-se as grandezas

$$\left. \begin{aligned} r^* &= \text{máximo } (r_a^*, r_b^*) \\ \omega^* &= \text{máximo } (\omega_a^*, \omega_b^*) \\ \rho^* &= \rho_{\text{fluido}}^* \end{aligned} \right] \quad (\text{A2-1})$$

como padrões para a adimensionalização, tem-se as relações:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{F^*}{\rho^* \omega^{*2} r^{*4}} \\ Z &= \frac{Z^*}{r^*} \\ \ell_a &= \frac{\ell_a^*}{r^*}, \quad \ell_b = \frac{\ell_b^*}{r^*} \\ p &= \frac{p^*}{\rho^* \omega^{*2} r^{*2}} \\ r_a &= \frac{r_a^*}{r^*}, \quad r_b = \frac{r_b^*}{r^*} \\ t &= t^* \omega^* \\ u_x &= \frac{u_x^*}{\omega^* r^*}, \quad u_y = \frac{u_y^*}{\omega^* r^*} \\ x &= \frac{x^*}{r^*}, \quad y = \frac{y^*}{r^*} \\ \phi &= \frac{\phi^*}{\omega^* r^{*2}} \\ \eta_a &= \frac{\eta_a^*}{r^*}, \quad \eta_b = \frac{\eta_b^*}{r^*} \end{aligned} \right] \quad (\text{A2-2})$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= \frac{\omega_a^*}{\omega^*} , & \omega_b &= \frac{\omega_b^*}{\omega^*} \end{aligned} \right] \quad \left| \right.$$

APÊNDICE 3 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Seja a função ϕ_o definida no domínio D interno ao contorno C, satisfazendo a equação de Laplace e as condições de contorno em C_a e C_b , conforme a Figura A3-1.

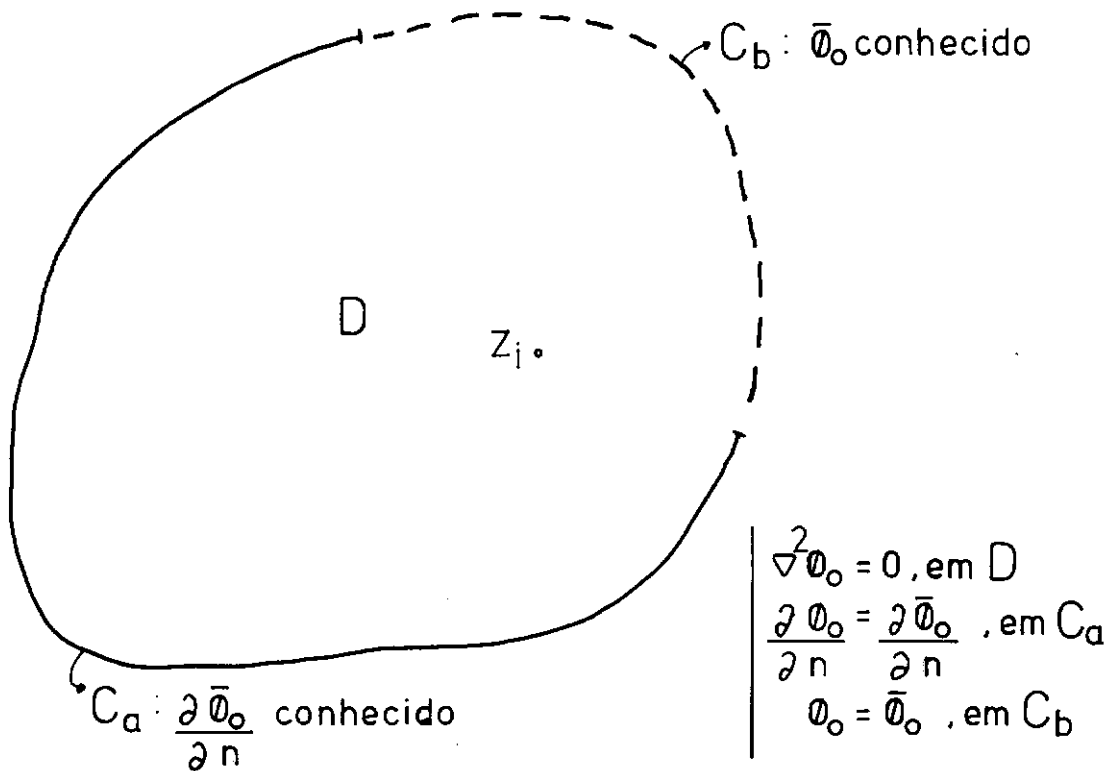


FIGURA A3.1 - Contornos C_a e C_b

Segundo BREBBIA E WALKER¹⁰, uma solução aproximada para ϕ_o pode ser obtida através de uma técnica de minimização dos erros cometidos em decorrência da utilização da aproximação ϕ em lugar de ϕ_o . Tais erros podem ser definidos como se segue:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \nabla^2 \phi & , \text{ em } D \\ \varepsilon_a &= \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} & , \text{ em } C_a \\ \varepsilon_b &= \phi - \bar{\phi} & , \text{ em } C_b \end{aligned} \right] \quad (A3-1)$$

onde ε , ε_a e ε_b representam os erros cometidos, e $\bar{\phi}$ e $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}$ os valores conhecidos no contorno.

Os erros definidos em (A3-1) podem ser ponderados através de funções peso, da maneira que se segue:

$$\int_D \varepsilon w \, dD = \int_{C_a} \varepsilon_a w \, dC - \int_{C_b} \varepsilon_b \frac{\partial w}{\partial n} \, dC, \quad (A3-2)$$

ou seja,

$$\int_D (\nabla^2 \phi) w \, dD = \int_{C_a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right) w \, dC - \int_{C_b} (\phi - \bar{\phi}) \frac{\partial w}{\partial n} \, dC \quad (A3-3)$$

onde w é a função peso.

Entretanto, pela 2.^a identidade de Green,

(KAPLAN¹¹),

$$\int_D (w \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 w) \, dD = \int_C \left(w \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial w}{\partial n} \right) \, dC \quad (A3-4)$$

Aplicando-se (A3-4) ao primeiro membro de (A3-3), tem-se:

$$\int_D (\nabla^2 \phi) w \, dD = \int_D (\nabla^2 w) \phi \, dD + \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, dC - \int_C \phi \frac{\partial w}{\partial n} \, dC \quad (A3-5)$$

Igualando-se as expressões (A3-3) e (A3-5), e observando-se que

$$\int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, dC = \int_{C_a} \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, dC + \int_{C_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, dC \quad ,$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \int_D (\nabla^2 w) \phi \, dD &= - \int_{C_a} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} w \, dC - \int_{C_b} \frac{\partial \phi}{\partial n} w \, dC + \int_{C_a} \phi \frac{\partial w}{\partial n} \, dC + \\ &+ \int_{C_b} \bar{\phi} \frac{\partial w}{\partial n} \, dC \end{aligned} \quad (A3-6)$$

A expressão (A3-6) constitui a formulação inversa da expressão (A3-3) e representa a relação fundamental do método dos Elementos de Contorno.

Tomando-se como função peso a solução da equação

$$\nabla^2 w = \delta_i \quad , \quad (A3-7)$$

onde δ_i é a função Delta de Dirac, representando um potencial unitário concentrado no ponto z_i , tem-se a formulação básica para o Método dos Elementos de Contorno. Torna-se importante observar que a função w (função de Green) é função não só do ponto onde se deseja conhecer seu valor, como também do ponto z_i onde se localiza o potencial concentrado. Assim, no plano complexo,

$$w = w(z, z_i) = \bar{w}_i(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|z - z_i|} \right) \quad (A3-8)$$

Então,

$$\int_D (\nabla^2 w_i) \phi \, dD = \int_D \delta_i \phi \, dD = -\phi(Z_i) \quad (A3-9)$$

e, portanto, assumindo-se que $\phi = \bar{\phi}$ em C_b e $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}$ em C_a , tem-se:

$$\phi(Z_i) = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} w_i \, dC - \int_C \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \, dC \quad (A3-10)$$

A equação (A3-10) só pode ser aplicada para pontos Z_i internos ao domínio D , pois, para pontos Z_i pertencentes ao contorno C , as integrais do contorno estarão sendo avaliadas ao longo de uma linha que contém o ponto singular Z_i . Entretanto, de acordo com BREBBIA e WALKER¹⁰, se as integrais de contorno de (A3-10), quando Z_i pertence ao contorno C , forem admitidas como sendo realizadas por "sobre" o ponto Z_i , isto é, contornando-se a singularidade, então a expressão para $\phi(Z_i)$ no contorno é dada por:

$$\frac{1}{2} \phi(Z_i) = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} w_i \, dC - \int_C \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \, dC \quad (A3-11)$$

Assim, a partir de (A3-10) e (A3-11), tem-se:

$$a_i \phi(Z_i) = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} w_i \, dC - \int_C \phi \frac{\partial w_i}{\partial n} \, dC \quad (A3-12)$$

$$\text{onde } \begin{cases} a_i = 1, \text{ para } Z_i \text{ no interior de } D \\ a_i = \frac{1}{2}, \text{ para } Z_i \text{ sobre o contorno } C \end{cases}$$

APÊNDICE 4 - AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS G_{ij} E \hat{H}_{ij}

Conforme definido pelas expressões (IV-2) e (IV-4), a integral G_{ij} é dada por:

$$G_{ij} = \int_{C_j} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|z - z_i|} \right) dz \quad (A4-1)$$

Utilizando-se a nomenclatura definida pela Figura A4-1a tem-se a expressão de G_{ij} para elementos retilíneos:

$$G_{ij} = \frac{-1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r \ln(r)}{\sqrt{r^2 - h^2}} dr \quad (A4-2)$$

Convém observar-se que a expressão (A4-2) é válida somente quando o ponto M, definido segundo a mesma figura, é externo ao elemento C_j . Quando M pertence a esse intervalo (Figura A4-1b), a integral G_{ij} pode ser dada por:

$$G_{ij} = \frac{-1}{2\pi} \left[\int_M^{r_2} \frac{r \ln(r)}{\sqrt{r^2 - h^2}} dr + \int_M^{r_1} \frac{r \ln(r)}{\sqrt{r^2 - h^2}} dr \right] \quad (A4-3)$$

A integral indefinida $\int \frac{r \ln(r)}{\sqrt{r^2 - h^2}} dr$ pode ser integrada por partes, i.é.,

$$\int \frac{r \ln(r)}{\sqrt{r^2 - h^2}} = \ln(r) \sqrt{r^2 - h^2} - \int \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} dr ,$$

reduzindo-se assim o problema a uma integral de solução conheci

da (SPIEGEL¹²).

Assim, a integral G_{ij} é dada por:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sqrt{r_2^2 - h^2} \left[1 - \ln(r_2) \right] + k \sqrt{r_1^2 - h^2} \left[1 - \ln(r_1) \right] + \right. \\ \left. - h \left(\arccos \left| \frac{h}{r_2} \right| + k \arccos \left| \frac{h}{r_1} \right| \right) \right\} \quad (A4-4)$$

onde $\begin{cases} k = 1 & , \text{ para } M \text{ pertencendo ao elemento } C_j. \\ k = -1 & , \text{ para } M \text{ externo ao elemento } C_j. \end{cases}$

A integral \hat{H}_{ij} , por sua vez, definida a través das expressões (IV-2) e (IV-4) é dada por:

$$\hat{H}_{ij} = \frac{-1}{2\pi} \int_{C_j} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} dC \quad (A4-5)$$

Utilizando-se a nomenclatura definida pela Figura A4-1a tem-se a expressão de \hat{H}_{ij} para elementos retilíneos:

$$\hat{H}_{ij} = \frac{-1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \left(\pm \frac{h}{r} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} dr \quad (A4-6)$$

onde o sinal de $\left(\pm \frac{h}{r} \right)$ é dado pela direção da normal externa ao elemento.

Deve-se observar que a expressão (A4-6), assim como a expressão (A4-2), é válida somente quando o ponto M é externo ao elemento C_j . Quando M pertence a esse elemento,

a integral \hat{H}_{ij} pode ser avaliada mediante a soma de duas outras, de modo semelhante à expressão (A4-3). Como a integral indefinida

da $\int \frac{1}{r \sqrt{r^2 - h^2}} dr$ tem solução conhecida (SPIEGEL¹²), pode-se dizer então que a integral \hat{H}_{ij} é dada por:

$$\hat{H}_{ij} = \frac{k_1}{2\pi} \left\{ \arccos \left| \frac{h}{r_2} \right| + k_2 \arccos \left| \frac{h}{r_1} \right| \right\} \quad (A4-7)$$

$$\text{para } h \neq 0, \text{ onde } \begin{cases} k_1 = 1, \text{ para } \vec{n}_1 \text{ (Figura A4-1b)} \\ k_1 = -1, \text{ para } \vec{n}_2 \text{ (Figura A4-1b)} \\ k_2 = 1, \text{ para } M \in C_j \\ k_2 = -1, \text{ para } M \notin C_j \end{cases}$$

OBS: Quando $h = 0$, $\Rightarrow \hat{H}_{ij} = 0$

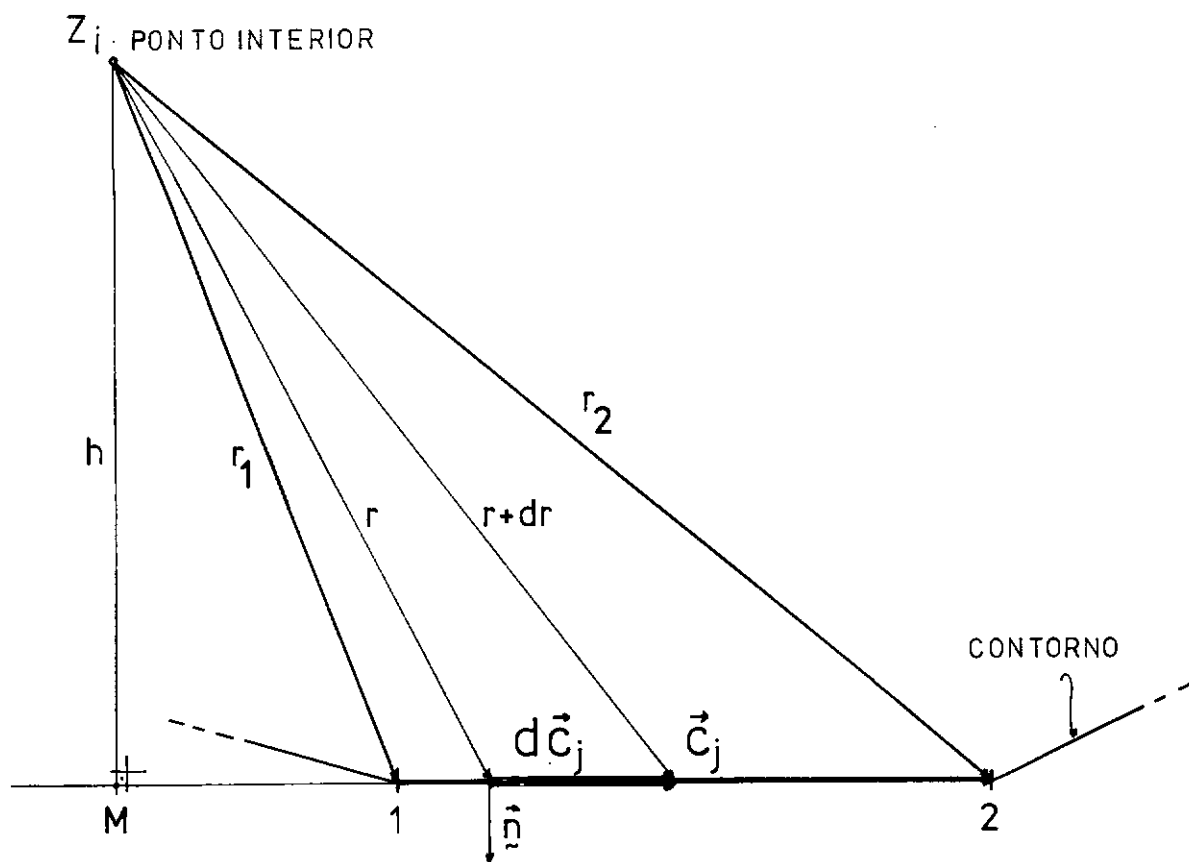


FIGURA A4.1a - Elemento de contorno

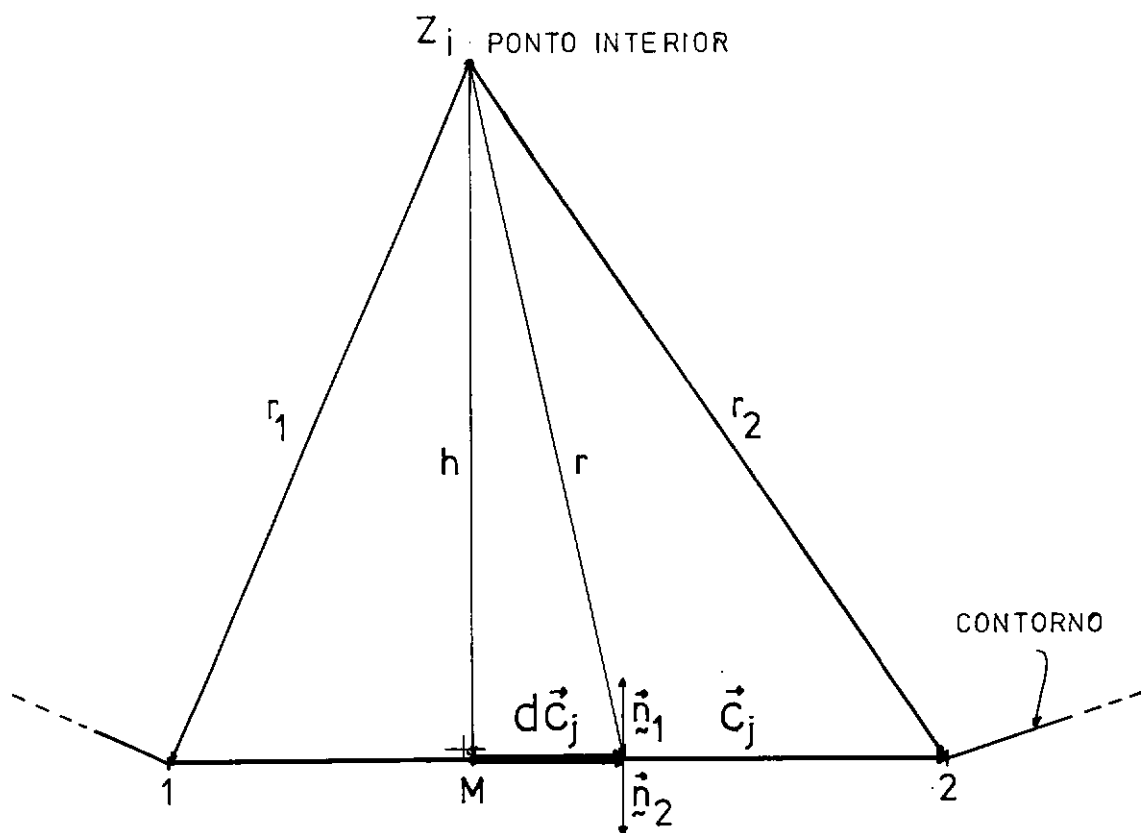


FIGURA A4.1b - Elemento de contorno

BIBLIOGRAFIA

1. CHEN, S.S. Fluid Damping for Circular Cylinder Structures. Nuclear Engineering and Design, 63:81-100, 1981.
2. VAN DYKE, Milton D. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York, Academic Press, 1964. 229p. il.
3. NEWMANN, John N. Marine Hydrodynamics. Cambridge, The MIT Press, 1978.
4. CHUNG, H. & CHEN, S.S. Vibration of a Group of Circular Cylinders in a Confined Fluid. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Serie E, 44(2):213-7, Jun 1977.
5. ROBERTSON, James Mueller. Hydrodynamics in Theory and Application. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965. 652p.
6. MILNE-THOMSON, Louis Melville. Theoretical Aerodynamics. 4.ed. London, MacMillan, 1966. 430 p. il.
7. MILNE-THOMSON, Louis Melville. Theoretical Hydrodynamics. 5.ed. New York, MacMillan, 1968. 743 p.
8. KENNARD, Earle Hesse. Irrotational Flow of Frictionless Fluids Mostly of Invariable Density. Washington, U.S. Government Printing Office, 1967. 412p.
9. SPIEGEL, Murray R. Variáveis Complexas. Trad. de José Ramundo Braga Coelho. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1977, 469p.
10. BREBBIA, C.A. & WALKER, S. Boundary Element Techniques in Engineering. London, Butterworth, 1980.

11. KAPLAN, Wilfred. Advanced Calculus. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1965. 679p.
12. SPIEGEL, Murray R. Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1979. 270p.
13. PEDROSA JUNIOR, O.A. Comportamento Hidrodinâmico de Quebra-Mares Flutuantes. Rio de Janeiro, UFRJ, 1980. p.(Tese de mestrado).
14. PIRES JUNIOR, F.C.M. Solução de Problemas Bidimensionais de Superfície Livre Segundo o Método dos Elementos Finitos. Rio de Janeiro, UFRJ, 1977. p.(Tese de mestrado).